Как е приложима математиката към света?

Ангел С. Стефанов

Институт по философия и социология – БАН

angstefanov@abv.bg

How Mathematics is Applicable to the World?

Anguel S. Stefanov

Institute of Philosophy and Sociology at the Bulgarian Academy of Sciences

angstefanov@abv.bg

Резюме: Статията има за цел да даде отговор на своя заглавен въпрос. В тази връзка са разгледани два подхода към търсения отговор – историчен и теоретичен.
Ключови думи: математика, философия, математически структури, приложимост на теории.

Abstract: The aim of the paper is to reach an answer to its title question. In this connection two approaches are being considered for the answer that is looked for – a historical and a theoretical one.
Keywords: mathematics, philosophy, mathematical structures, application of theories.

Постигането на отговор на заглавния въпрос е сложно философско начинание, което бе изразено чрез известното признание на Юджин Вигнер за „необяснимата ефективност на математиката в природните науки". Тази необяснимост произтича от обстоятелството, че математическите обекти от една страна, и природните обекти от друга, имат твърде различна онтологична природа, поради своя различен начин на съществуване. Но независимо от това несъмнено обстоятелство, още преди три столетия и половина се приписва на Галилей откровението, че законите на природата са написани на езика на математиката. Въпросът обаче как това е възможно все още продължава да крие своето решение, което би се превърнало в един удовлетворителен за повечето философи отговор.

Според крилатата мисъл на Кронекер, Бог е положил като основа реда на естествените числа, а сетне цялата математика, вече като човешко начинание, се изгражда върху тази основа. В тази връзка мога да кажа, че ако човек е искрено вярващ християнин и не е изкушен от философски размишления, то въпросът как е приложима математиката към света има лесен отговор. И наистина, щом основата на математиката е Божие дело, какъвто е и самият сътворен от Него свят, то въпросът за тяхната естествена съвместимост се решава от само себе си. Или в хармония с една сентенция на Лайбниц: Cum Deus calculat et cogitationem exercet, fit mundus (Когато Бог изчислява и упражнява мисълта, светът става).

На това място е любопитно да вметна, че вероятно поради приведената мисъл на Кронекер за естествените числа като Божия основа на математиката, чийто ред започва с единицата, на негово име е кръстен известният символ, представящ аналога на единицата в света на матриците като математически обекти. Това е единичната матрица, известна като *символ на Кронекер*. Аналогията е следната. Ако n е естествено число, то

$$1.n = n.$$

Ако E е единичната матрица, а A е произволна такава, то

$$E.A = A.$$

Това следва непосредствено от правилото за умножение на матриците с еднакъв ранг n, имащи n^2 елементи. Ако A и B са две такива матрици, то всеки елемент на тяхното произведение C = A.B се представя по следния начин чрез техните елементи:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Тогава, за да имаме E.A = A, следва че $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$, и $e_{ij} = 1$ при $i = j$. Сиреч единичната матрица, или символът на Кронекер, трябва да има елементи навсякъде равни на нула, с изключение на диагонал съставен *само от единици*.

Ако оставим обаче крилатите сентенции във властта на популяризаторите на математиката, как можем да подходим към отговора на интересуващия ни въпрос без намесата на Бог?

Изглежда има два начина за това. Единият е просветителски, изисква много време, и не дава гаранция за успех. Това е историческият преглед на появата и развитието на математически структури, подсказани от непосредствен човешки опит и сдобиващи се впоследствие с нарастваща абстрактност. Такива са например идеята за число изобщо (от естествено, през рационално, реално, комплексно и т.н.), както и първите геометрични чертежи върху пясък. Така можем да тръгнем от теоремата на Питагор и геометрията на Евклид, да минем през математическите изследвания на Декарт, Нютон и Лайбниц, и да стигнем до многотомните издания на Бурбаки. Това значи да тръгнем от търсенето на отношения между величини диа грамòн и ди'аритмòн (т.е. чрез чертежи, диаграми и чрез числа) и да завършим с приложимостта на математичните структури в съвременната ни математика. Такава екскурзия в историята на математиката обаче не може да ни даде истински отговор на интересуващия ни въпрос, а само да спре дъха ни пред развитието на „тази гордост на човешкия разум“, както Кант нарича почтително математиката. Защото изглеждащата разбираема връзка между исторически началните математически обекти като отсечки, многоъгълници и числа от една страна, и реални обекти с различни геометрични повърхности и изразяване на количествени отношения между тях (по-малък, по-голям или равен брой на еднотипни материални обекти) бързо се изгубва при прилагането на сложни математични структури към света (например прилагането на безкрайно мерно комплексно векторно пространство при описание на състоянията на квантовите обекти).

Кой е вторият път?

В самото начало на своята интересна книга *Идеята за историята* Робин Джордж Колингууд мъдро предупреждава, че разбирането за философия на историята са предопределя от разбирането за философия. Нашият втори път може да следва същия съвет. Но това означава, че търсеният отговор едва ли може да бъде еднозначен, а ще зависи от определена философска визия за природата на математическите обекти. Тук ще се сблъскаме обаче с различни възгледи, втъкани във ветрилото на различни философски постулати от платонически и неплатонически тип, метаматематически разсъждения като тези на Бенасераф и не само на него. За да не разводнявам изложението на моите размисли, както и за да избегна плурализма на отговорите, който не помага за намирането на приемливо решение на питането как е приложима математиката към света, ще се обърна към едно предложение, характерно за философски детския възглед за света. Предложението е следното:

(i) Щом като светът може да се разкроява на различни системно организирани фрагменти, влизащи в човешкото теоретично знание като онтологични модели, и щом

(ii) Математични структури се изобретяват като идеализирани хомоморфни съответствия на структури и релации на такива онтологични модели, то

(iii) Напълно разумно е да се допусне, че математични структури могат да бъдат преки или опосредовани репрезентации на реални светови структури.

Нарекох този отговор „детски“, защото е непринудено наивен. Той е наивен, защото не би могъл да се приеме безпроблемно без философско разяснение, сиреч той не е достатъчен отговор сам по себе си, колкото и да ни харесва като постановка. А той е приемлив като постановка, защото не само показва защо математиката е приложима към света, но може да защити и хипотезата, че щом това е така, то може да се очаква, че добре прилягащите към своя предмет математически схеми могат да имат потенциал, надхвърлящ първоначално вложения в тях замисъл. Имам предвид стигането до ново знание. Тук е мястото да приведа подходящ пример за това мое увещание.

Нека си припомним добре известната система от четири диференциални уравнения на Максуел, презентиращи свойствата на електромагнитното поле. Второто от тях[1] постановява, че дивергенцията на вектора на магнитната индукция е равна на нула:

$$(2)\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Но дали това уравнение е отделна „находка“, или би могло да се получи от знанието, заключено вече в математическата формулировка на друго уравнение на Максуел?

Да погледнем към третото уравнение, изразяващо закона за електромагнитната индукция:

$$(3)\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{B}/\partial t,$$

където с **E** е означен векторът на електричното поле. Именно от този математически изразен закон можем да получим ново знание, а именно знанието, че div **B** = 0.

Да вземем дивергенция от двата вектора, стоящи от двете страни на уравнение (3):

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mathrm{div}\,\partial\mathbf{B}/\partial t.$$

Като отчетем, че лявата страна на последното равенство е равна на нула (защото е взета дивергенция от ротация на един вектор), получаваме

$$0 = \mathrm{div}\,\partial\mathbf{B}/\partial t = \partial/\partial t\ \mathrm{div}\mathbf{B}.$$

Последното уравнение означава, че div **B** не зависи от времето при всяка стойност на вектора **B**, а значи и когато той е нулев. Но тогава div **B** също ще е равна на нула, което и трябваше да се докаже. С други думи, при адекватно математическо моделиране на закона за електромагнитната индукция, представен чрез математическия израз (3), той може да ни предостави ново знание чрез достигането до уравнение (2). Заключеното в него знание ни казва, че линиите на магнитната индукция нямат нито начало, нито край. Оттук пък следва, че не съществуват магнитни заряди, т.е. магнитни монополи, създаващи магнитното поле по тертипа на образуване на електричното поле чрез

[1] При утвърдената тяхна класическа подредба.

електричните заряди. С други думи, възможно е да стигаме – чрез използване на езика на математиката – до същностно знание за света.

Според Морис Клайн[2] човек е изправен пред двойна загадка. „Защо в онези случаи, когато физическото явление ни е понятно и сме приели съответни аксиоми, стотици следствия, получени от тях, се оказват също толкова приложими към реалния свят, както и самите аксиоми? Съгласува ли се природата с човешката логика? Не по-малко важен е и вторият въпрос: защо математиката е ефективна и при описанието на онези физични явления, които са ни непонятни?".

Нека се върна сега към моя наивен отговор за ефективността на математиката и да потърся негово философско основание.

На пръв поглед то би могло да бъде намерено в приемливостта на философския реализъм дотолкова, доколкото той постановява както съществуването на действителен свят, така и на неговата познаваемост от човека, гарантирана например от еволюционна епистемология, която да привлече математиката като точен познавателен инструмент. При всичко това обаче интересуващият ни отговор на въпроса за приложимостта на математиката към света все някак си се изплъзва през външното отношение между реални светови структури и идеални математически такива.

Поради тази причина моят общ отговор е следният. Математиката е приложима към света *чрез* научните теории за него. Математиката е *вътре* в самото теоретично знание, тя го прецизира и операционализира. Тя може да бъде негова органична част, обличаща по точен символен начин чисти теоретични конструкти, изграждащи тъканта на съвременното научно познание, независимо от степента на тяхната абстрактна отдалеченост от непосредствения човешки опит.

Тогава остава да отговорим на следващия и еднопорядков по трудност въпрос: как са приложими човешките теории към света? Системно издържан философски отговор на това питане може да дойде от прояcняването на трансценденталните предпоставки и основоположения на човешката способност за теоретизиране, което надхвърля твърде много претенцията на изложените тук кратки размисли.

Литература/References

Kline, Morris. 1988. Matematika. Poisk istinay. Moskva: Izdatelystvo „Mir". [Клайн, Морис. 1988. *Математика. Поиск истины*. Москва: Издательство „Мир".]

[2] *Математика. Поиск истины*. Москва: Издательство „Мир", 1988, с. 237.