Alternative Logic of Hugh MacColl

Petar Evgeniev Evtimov, Institute of philosophy and sociology (BAS)

evgenievp@yahoo.com

Алтернативната логика на Хю МакКол

Петър Евгениев Евтимов, Институт по философия и социология (БАН)

evgenievp@yahoo.com

Abstract: *Imposed by time predicate logic is extension of propositional logic and this extension form first order logic or the so called "classical" logic. But in the time there is another system with similar properties. The logic of Hugh MacColl suggest one more successful connection between tradition and formal logic because it adds thesis of Aristotle and Boethius. Furthermore MacColl system include some modal and relevant elements, along with this it is five valued.*

Key words: *MacColl, modal, connexive, relevant, predicate logic, five valued*

Резюме: *Наложилата се във времето предикатна логика е разширение на пропозиционалната и това разширение формира логиката от първи ред или т.нар. „класическа“ логика. Във времето обаче съществува и друга логика с подобни свойства. Логиката на Хю МакКол предлага едно по-успешно свързване на традицията с формалната логика като включва конексивните тезиси на Аристотел и Боеций. Логиката включва някои модални и релевантни елементи като заедно с това е пет значна.*

Ключови думи: *МакКол модален, конексивен, релевантен, предикатна логика, пет значна*

След формализирането на логиката в програмата Principia mathematica (1910) на Ръсел и Уайтхед логиката получава своя синтактична парадигма, т.е. пропозициите и логическите операции получават универсален начин на изразяване. С труда на Фреге "Begriffsschrift" (1879) универсалното изразяване на пропозиционалната логика се развива така че да обхваща и логиката от първи ред, т.е. пропозиционалната с предикатното разширение. Предикатното разширение означава, че към елементарните твърдения се добавят и квантори, които касаят количеството на субекта, за който се говори. Двата предикатни квантора са универсален и екзистенциален. Означават се с обърнати А и Е ($\forall$ и $\exists$), чието значение на немски е „Alle“ (всички) и „Existere“ (съществува). С техните отрицания кванторите образуват нови категории: „не всички“, $\sim\forall$ „не съществува“ $\sim\exists$, „не съществува нещо, което не е“ $\sim\exists\sim$ и „не всяко нещо нещо не е“ $\sim\forall\sim$. Така се развива и тезата, че тази вече „класическа“ логика е логика на математиката и заедно с това „на основа на П.Л[1]. (с равенство) са построени основни раздели от математиката“ (Табаков М. 2012: 307). Така логиката може да се нарече логика на математиката. Наред с днешната логика обаче съществува и едно непознато предложение за логическа система, чието предназначение е същото и е в този времеви отрязък (1906 г.). Негов автор е Хю МакКол и то е публикувано в книгата му Symbolic Logic And Its Applications (1906) (Hugh MacColl). Неговата идея за система е по-богата от логиките по това време в поне няколко отношения: тя е многозначна (5 - значна), може да се разглежда като модална, конексивна и предикатна. По това време не съществуват релевантни идеи, (защото пионерите Андерсон и Белнап) издават първата си „The Logic of Relevance and Necessity“ през 1975г. но въпреки това неговата логика наподобява и релевантни наченки. Вярно е, че Андерсон и Белнап споменават като пионер Вилхелм Акерман с неговата Begründung einer strengen Implikation, но тя е написана едва през 1956г.

МакКол е признат и приживе с друго оригинално откритие, което го прави „първият логик, който определя включването на клас чрез импликация“ (McCall S[2]. 2012: 419). За пример, Сторс МъкКал използва „Днес обичайния превод на ‘всички A са B’ с използването на квантори е (x)(Ax→Bx), но подходът на МакКол не включва квантори.“[3] (Ibid: 421). Така тази импликация, която е в обхвата на универсалния квантор за логиката на МакКол изглежда така “a→b”, или с неговата символизация “a:b”. Съответно силогистичния модус Барбара (ако всички A са B и всички B са C, то всички A са C) става: [(a→b)^(b→c)]→(a→c)”. (McCall S. 2012: 420). В неговата символизация конюнкцията се означава с x, а импликацията с : и същата формула би изглеждала така: ((a:b)x(b:c)):(a:c).

В символиката на МакКол предикатите се интерпретират като буквата за предикат се изразява до буквата за твърдение с горен индекс (A^B) и се чете като “суфикс с номер

A_1“ (MacColl H. 1906: 4). МакКол дава пример с „моята леля е с кафява коса“. Така субектът „леля“ се означава с „А“, а предиката „кафява коса“ се изписва с буква В като горен индекс (на английски суфикс). Субектите в логиката на МакКол могат да се номерират, например A_1, A_2 и т.н. Така от една определена леля може да се различи за коя точно става дума – „леля“ 1, „леля“ 2 и т.н. Освен по номер, субектите могат да се различават и по приписан белег, т.е. друг предикат. Така може да се прави разлика между „леля 1 с кафява коса“ „леля 2 с кафява коса“ и т.н.

Освен предикат и суфикс, към буквата за твърдение (субекта) може да се добави и експонент – A^B_C като значението на експонента се отнася към предиката. Примерът на МакКол е “конят, който продадох, спечели състезанието”. Съответно кон се означава с Н, спечели – с предикат $_W$, а “който продадох”, с експонент – ^{S} (H^S_W). Местата на предиката $_W$ и експонента ^{S} могат да се разменят и същият израз може да изглежда така $(H_W)^S$ или така: $(H_S)^W$ („Конят, който беше продаден от мен, спечели състезанието“) (Ibid: 5) Богатството на логиката предлага и различни съчетания – например “Символът H^W без суфикс може да означава конят спечели състезанието, без уточнение кой кон от серията H_1, H_2 и т.н.”. (Ibid: 5). Изказът се обогатява с естествен елемент от логиката, какъвто е отрицанието. Отрицанието тук се означава с минус пред предиката или експонента. Например H^{-S} означава „конят, който не беше продаден“. Към твърдение, съставено от субект и предикат, може да бъде прикачен и втори предикат без логическата операция „и“. В предикатната логика начинът да се каже, че субектът х има два предиката, е „Fa^Ba“, т.е. „а“ има предикат F и предикат B. Тук „а“ се използва като индивидна константа, а не като индивидна променлива, защото се има предвид точно един субект. В логиката на МакКол това може да се означи така: $(X^F)^B$ и се чете така: „X има предикат F и принадлежи към B“. Алтернативното означение обаче запазва и това от предикатната логика, т.е. същото нещо може да се означи и така: (X^B x X^F), като конюнкцията МакКол означава с „x“.

Освен тези богатства, МакКол предлага и други. Символът 0 например денотира “несъществуване, така че 0_1, 0_2, 0_3 и т.н. означават серии от имена или символи, които не кореспондират с нищо във вселената ни от признати реалности” (Ibid: 5). По този начин изразът H^0_S ще означава „конят, който беше продаден, не съществува“. В предикатната система този израз може изглежда така: $\sim\exists x(Sx)$, т.е. не съществува кон, който е продаден. Съответно пред символ 0 също може да стои минус, който отрича несъществуването, т.е.

утвърждава съществуване. Така H^{-0}_{S} ще означава, че съществува продаден кон (∃x(Sx)). При представянето на символ 0, МакКол никъде не използва думата „квантор“ (Ibid: 5-6). Това е разбираемо предвид факта, че кванторите не са основен елемент за логиката, и отрицанието може да се използва по нов начин. Създаването на пропозиционална логика, обхващаща кванторите “съществуване” и “всички”, без да ги включва като отделните познати символи (обърнати А и Е - ∀ и ∃) и без да ги употребява по познатия начин, се оказва възможна задача. За целта и в унисон с идеята за класова импликация „p→q“ се интерпретира като “всички p са q” (т.е. логическата импликация между две пропозиции (означени с малки букви), без други особености, означава, че следването е във всички случаи). Съответно отрицанието на това твърдение изглежда така „p→~q“ и означава, че никои p не са q (тази употреба се отличава от обичайната ~(p→q)) и отговаря на конексивното разбиране за неистинно следване. Само по себе си конексивното следване също е различно от класическото (p^~q), което гласи, че дадено следване е невалидно, ако антецедентът е истина, а консеквентът лъжа. По този начин “някои p са q” се означава така: ~(p→~q). Последната зависимост от логическия квадрат е “някои p не са q” и тя се означава както следва – ~(p→q). Оказва се, че тази синтактична промяна прави възможен опита с пропозиционални средства да бъдат обхванати силогистичните модуси. Опитът се оказва успешен, защото „Всички те са изводими в логиката на МакКол, която вярно репродуцира традиционната силогистична логика“. (McCall S. 2012: 433).

Конексивната логика на МакКол е първата в съвременен смисъл именно защото конексивните системи се определят като *контра-класически*. (Wansing H. 2020). Съответно този тип системи имат фундаментална разлика спрямо останалите. И това в някакъв смисъл е проблемно, защото признаването на тези [4] самоочевидни тезиси[5] ги прави част от логическата традиция, а с това техният статут следва да е равен на други логически инструменти като например законът за непротиворечието (чиито автор е отново Аристотел) или законите на Де Морган.

Една логика се определя като конексивна чрез условието на конексивна импликация, както се вижда от речниковото определение: „Конексивна логика е нестандартна логика, която е мотивирана в голяма част от идеята, че никоя формула не трябва да имплицира или да бъде имплицирана от своето отрицание“. (Cook T. 2009: 61). Най-честите примери за конексивност са тезисите на Аристотел (AT) и Боеций (BT). Тези самоочевидни истини обаче нямат статут на закони или теореми в пропозиционалната система, защото според нейната материална импликация и отрицание те не са тавтологии.

Освен тези заслуги, логиката на МакКол включва някои модални и релевантни елементи, като заедно с това логиката му е петзначна. Споменатото „включване на клас в импликация" постига, от една страна, конексивна импликация, от друга, може да се каже, че за неговата логика съществуват две импликации. Това е така, защото позволява използването на логическите оператори в техния класически смисъл. Дефиницията за импликация е $(A^{B}:C^{D})$ ако $(A^{B}:C^{-D})$ η и $(A^{-B}+C^{D})$ ϵ. Последната е класическата дефиниция на материална импликация (~pVq). С това и дефиницията за еквивалентност също е каквато в пропозиционалната система $(A=B) \Leftrightarrow (A:B)(B:A)$ (или $(A \rightarrow B)$^$(B \rightarrow A)$).

Друг аспект на трактовката за класова импликация е, че тя е валидна само за истинни изрази и представлява предложение по един спорен въпрос от това време. Този аспект на неговата импликация силно напомня на релевантното следване, за което е известно условието на обща променлива между антецедента и консеквента. Ситуацията касае именно такива формули и факта, че според класическата логика те са истинни, а не би трябвало. За релевантната логика например т.нар. симплификация, според която $((A \wedge B) \vdash A)$ и $((A \wedge B) \vdash B)$, не следва да са коректни следвания (въпреки че в някои релевантни системи тези две следвания са аксиоми). Релевантните условия изключват формула „B" в първия случай и формула „A" във втория, защото те се явяват „фиктивни" формули и нямат „обща променлива" с консеквента. Целта на условието за обща променлива е всяка стъпка от хипотезата към заключението да е релевантна на него, като по този начин няма фиктивно участващи формули (критиката е на Сторс МъкКал и Еверет Нелсън). (McCall S. 1966: 419). Логиката на МакКол едва ли може да се характеризира като изцяло релевантна, но чрез неговата идея, която може да се нарече „класова импликация", симплификацията изглежда по-гъвкава. Той казва:

„Нека класовете A и B да бъдат реални, но изключващи се. С нашите данни, класът A, съдържащ отделните A_1, A_2, и т.н. наистина съществуват; това се отнася и за B, който се състои от отделните B_1, B_2 и т.н.; но класът AB, състоящ се само от индивидуалните $(AB)_1$, $(AB)_2$, и т.н. от предполагаемите общи A и B няма реално съществуване; така той е нереален клас и нереалните елементи, които го съставят, могат да бъдат определени с 0_1, 0_2, и т.н. Можем ли консистентно да твърдим, както формулата AB -< A (или нейната еквивалентна в този случай 0 -<A) твърди, че нереалните (и следователно несъществуващи) елементи 0_1, 0_2 и т.н. се съдържат в класа от реални индивидуални A_1 A_2 и т.н.?" (MacColl H. 1905: 578)

Отговорът на МакКол е, че според него клас, съставен от нереалии, или т.нар. празен клас, трябва по необходимост да бъде изключен от всеки клас със съществуващи елементи (Ibid: 578). Той продължава:

„Обяснението от моя гледна точка е, че объркването е от тяхна страна, и това, че то произтича от факта, че те (както и аз по-рано) не правят символна разлика между реалии и нереалии, които аз сега респективно репрезентирам със символ **e** и **0**. За тях „съществуване“ означава просто съществуване в Универсума на Дискурса, независимо дали индивидуалиите, съставящи този универсум, са реални или нереални; и символът **0**, както те го разбират, просто означава липсване от този универсум. За мен символът **e** означава съществуване и **0** означава несъществуване, двете от които могат или могат да не съ-съществуват в Универсума на Дискурса или Символния Дискурс, S. Липсване от Универсума на Дискурса аз твърдя, че е нелогично. Веднъж нещо (реално или нереално), за което се говори, трябва от този факт да принадлежи към Символния Универсум S, въпреки че не е необходимо да е част от универсума на реалиите **e**.“ (Ibid: 579).

С този пасаж МакКол прокарва разликата между съществуване на реални обекти в универсума на дискурса и съществуване на нереални обекти в него. Идеята му става ясна от това, което той нарича съ-съществуване. Познатият във философията пример за съществуване на еднорози и русалки е изразим в символния му универсум като **0** или **-0**, но такива обекти не могат да получат символ **e**, защото това би ги причислило към реалните обекти. Така, докато реалните обекти съществуват и в „признатата съвкупност от реалности“ и универсума на дискурса, нереалните обекти съществуват единствено в универсума на дискурса. От това следва и че не може да има „несъществуване“ в универсума на дискурса, защото той обхваща всякакви елементи и не може да има нещо, за което да не може да се говори в него.

С тази трактовка на класовете и обектите, импликацията става немонотонна в някаква степен. Т.е. дадена импликация е монотонна, когато „ако Δ имплицира А, то Δ, Ф имплицира А“ (Cook T. 2009: 47). В този случай формула Ф е фиктивна и участието ѝ не променя резултата от следването. В импликацията на МакКол това не може да стане и той илюстрира пречката с преход от универсално към ограничено следване. (MacColl H. 1906: с.39-40). Освен неговия пример, може да се посочи и това, че твърдения със символ **0** (такъв за несъществуване) няма начин да имплицират реални (такива със символ **e**).

Относно симплификацията може да се каже, че МакКол отново предшества най-ранната критика по темата, която ми е известна. Тя е на Еверет Нелсън в статията „intensional relations“. (Nelson E. 1930: 447-448). Този елемент на класовата импликация изглежда и релевантен, защото импликацията не се съобразява само с „материалния статут“ (т.е. с истинността на твърденията), а и с това, че връзката между антецедента и консеквента трябва да е индикатор, че те споделят общи елементи. По-късно МакКол е цитиран от Едуин Марес като претендент за баща на релевантното следване. (Mares E. 2020: 1).

Чрез синтаксиса на МакКол са изразими законите на Де Морган (MacColl H. 1906: 6) и (MacColl H. 1878: 16-17), както и асоциативните, идемпотентните, комутативните и транзитивните закони на пропозиционалната класическа система.

Възможните истинни стойности са 5: истина (t), неистина (ï), сигурно (ϵ), невъзможно (η) и надеждно (нещо, което не е невъзможно, но не е и сигурно - θ). Тук интересен, според мен момент е, че логиката на МакКол с тези стойности може да бъде разгледана и като модална. Няма пречка истинните стойности да се преведат в семантиките на Крипке като: t = 1; ï = 0; ϵ = (□); η = (~◊) и θ като комбинация от (~~◊^~□). Така се запазват и взаимозаменяемостите от модалната логика, т.е. (□ ⇔ ~◊~) и (~□~ ⇔ ◊) а петата стойност следва да бъде (~~◊^~□ ⇔ ◊^~□). Така се получава, че (◊^~□ ⇔ ◊^◊~). С тези истинни стойности и по този начин идеята за възможните светове на Лайбниц се оказва също „включена“ в логиката, като това отново става преди пионерът в модалната логика Кларънс Ървин Люис да публикува своите трудове от 1912 и неговата A Survey of Symbolic Logic (1918). Следователно това е поредният елемент от традицията, който МакКол долавя.

Въпросът за израз на универсалните твърдения без квантори става „(a→b)“ стои като „всички a са b“, „някои p са q“ стои така: ~(p→~q), „някои p не са q“ и тя се означава както следва – ~(p→q). С това кванторите и техните отрицания се оказват успешно заместени, защото привидно изпуснатият израз „не всички“ има същия смисъл като „някои p не са q“. Освен тези означения, МакКол дава и други, близки до кванторите: „1. $X^{0}{}_{-Y} =$ всички X са У 2. $X^{0}{}_{У}$= Никое X не е У; 3. $X^{e}{}_{У}$ = някои (символът за някои е „e“) X са У; 4. $X^{e}{}_{-У} = X^{-0}{}_{-У}$ = някои X не са У“ (MacColl H. 1878: 44).

Характерната за предикатната система разлика между индивидната константа и индивидната променлива също се улавя. За предикатната система индивидните константи са имена или конкретни обекти, например Сократ, Иван и т.н. Те се означават с малки букви и стоят зад предиката, като се означават с x,y,z и т.н. За конексивната логика на

МакКол субектът се разбира като всеобщ тогава, когато до него не стои суфикс, който да го определя, (или когато той не се пояснява от предиката, защото от групата с лели например, само една може да има кафява коса и това да я прави уникална), т.е. A, B, C и т.н. МакКол нарича тези субекти “класов терм”. (Ibid: 4).

Формалният език на логиката на МакКол е по-богат от предикатния на логиката от първи ред. Логиката му се оказва съвместима с модалните оператори, защото в нея те могат да са истинни стойности. Така, ако не е приемливо, че тя е модална, то може да се каже, че има модални „наченки“. По същия начин може да се говори и за релевантни наченки в нея, доколкото класовата импликация има немонотонен характер. Заедно с това логиката е петзначна, (по това време не ми е известно да съществува друга такава). Наред с това, достойнство на трудът на МакКол е, че в него изказът не е ограничен до замени между квантори, каквато е ситуацията в предикатната система, а е възможно изразяването на такива количествени определители и без тях. Показа се, че с „класовата“ импликация конексивните тезиси намират място и от гледна точка на определението за конексивна логика няма пречка тя да се нарече конексивна логика.

Недостатъци на логиката на МакКол са, на първо място, че за нея няма аксиоматика, т.е. тя не е аксиоматична система. На второ място, логиката няма всички екстензионални свойства, които днес се знаят за пропозиционалната система (бърза проверка на логическото следване, таблична проверка, естествена дедукция и т.н.). Освен това изглежда, че той не е успял да предизвика интереса на своите съвременници върху своите трудове и с това логиката му е останала един извор на идеи.

В заключение МакКол предлага една богата синтактична алтернатива на съвременния стандарт за синтаксис. Авторът претендира и че логиката му може да различава реални от нереални обекти. Това показва, че ако целта на една формална логика от това време е да улови логическата традиция, то познатата предикатна логика има поне един претендент в лицето на Хю МакКол и неговите трудове. Въпросът за синтаксиса днес е получил статут на парадигма в известна степен, защото докато семантиката за всяка некласическа система се модифицира, правилата за подредба на формулите се запазват винаги. Заедно с това конексивните тезиси и техният спорен статут възраждат въпроса за това, дали логическата традиция е правилно разбрана, защото съществуват изследвания като това на Росен Люцканов (Люцканов Р. 2005) и Доротея Ангелова (2019), според които логиците през вековете са знаели повече неща, отколкото днес „класическата“ логика включва. Според двамата автори, Аристотел и други автори от Античността задават съвременните „некласически“ белези като конексивност, многозначност, модалност и т.н.

И накрая, МакКол показва, че освен въпросите за логическите връзки и отношения, които традиционно се разискват, има основания да се постави и въпросът за адекватния синтаксис на класическата логика, както и това, кои точно идеи трябва да обхваща тя. Този въпрос става актуален, когато се вземе предвид, че МакКол сам е изработил логика, която улавя толкова много логически идеи и апликации, които, макар и да присъстват в съвременната логика, са добавени във времето и с трудовете на много логици.

Бележки:

{1} П.Л. е съкращение за предикатна логика.

{2} Сторс МъкКал (Storrs McCall) е друг логик, различен от Хю МакКол (Hugh MacColl).

{3} Някои логици изписват универсалния квантор с обърнато А, т.е. така "∀x" вместо само с (x).

{4} AT: ~(p→~p) и AT': ~(~p→p). Т.е. не може дадено твърдение да имплицира своето отрицание или да бъде имплицирано от него.

{5} Lenzen W. 2019 предлага една солидна аргументация на статута на конексивните тезиси.

{6} Не е вярно, че от истина следва неистина.

{7} Знакът „+“ в логиката на МакКол играе ролята на дизюнкция.

{8} МакКол понякога изпуска конюнкцията и долепени две формули една до друга обикновено са свързани с конюнкция (подобно на умножението, което се изпуска в математиката).

{9} Тази идея също звучи оригинално дори днес, защото в теорията на множествата е прието, че дадено празно множество е част, от което и да е друго множество.

{10} Символ 0 е различен от θ, защото първият означава несъществуване, а вторият е истинна стойност.

Литература:

Angelova D. Genezis na neklasicheskite logiki v Antichnostta, „Paradigma“ 2019

Cook T. Dictionary of philosophical logic "Edinburgh University Press" 2009

Gabbay D., (eds.) Pelletier F. (eds.) Woods J. (eds.) Logic: A History of its Central Concepts, Vol. 11 (Handbook of the History of Logic) "North Holland" 2012

Lenzen W. A critical Examination of the Historical Origins of Connexive Logic "History and Philosophy of Logic" 2019

Lewis C. I. A Survey of Symbolic Logic „University of California Press“ 1918

Lutskanov R. Aristotelovata logika: neklasicheska i netraditsionna, „Filosofia “ бр. 2 2005г.

MacColl H. Symbolic Logic and its applications “University of California Libraries” 1906

MacColl H. The Calculus of Equivalent Statements, Proceedings of the London Mathematical Society, 1878

MacColl H. The Existential Import of Propositions, Mind, vol 14, „Oxford University Press“ 1905

Mares, Edwin, "Relevance Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-relevance/>.

McCall S. Connexive Implication „Journal of Symbolic Logic“, Vol. 31, No 3. 1966

McCall S. Connexive Implication and the Syllogism “Oxford University Press” 1967

Nelson E. Intensional Relations, Mind, 39, 1930

Tabakov M. съст. Entsiklopedichen rechnik po logika i semantika izd. “Zvezdi” 2013г.

Wansing, Heinrich, "Connexive Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/logic-connexive/>.