# За обяснимата (не)ефективност на математиката в поведенческите науки

Росен Любомиров Люцканов

Институт по философия и социология – БАН

rosen.lutskanov@gmail.com

# The Reasonable (In)Effectiveness of Mathematics in Behavioral Sciences

Rosen Lubomirov Lutskanov

Institute of Philosophy and Sociology at the Bulgarian Academy of Sciences

rosen.lutskanov@gmail.com

**Резюме:** Въпросът за приложимостта на математиката е една от основните теми на философията на математиката. Една от областите, в които математическите модели се смятат за неадекватни в дескриптивен план, са поведенческите науки. Теорията на рационалния избор, например, се приема за нормативна теория, чието прилагане в реални ситуации ни изправя пред непреодолими трудности. Един клас от контрапримери, които целят да демонстрират това, са разработени от Амартя Сен. С тяхна помощ той изважда наяве проблемите, пред които ни изправя класическата идея, че рационалното поведение се свежда до максимизация на ациклична наредба. Изборите, които хората правят и които третираме като рационални в интуитивния смисъл на думата, са контекстуално зависими и се влияят от присъствието на алтернативи, които носят информация за това какво избираме и каква е самата ситуация на избор. Статията предлага формална реконструкция на начина, по който функционират тези алтернативи – като „флагове“, които сигнализират преминаването от една наредба към друга, съответно маркират концептуализирането на алтернативите като рискове или шансове. Това поражда интересна математическа структура, свързана с две от основните понятия в теория на наредбите (идеал и филтър) и която подлежи на аксиоматична характеризация чрез естествен набор от аксиоми. Това показва, в съгласие с позицията, поддържана от Давид Хилберт, че няма области, в които математиката е неприложима, а само такива, в които тя не е приложена правилно.

**Ключови думи:** приложимост на математиката, поведенчески науки, селективни оператори, рационален избор, проявени предпочитания.

**Abstract:** The question concerning the applicability of mathematics is one of the focal points of interest in the philosophy of mathematics. One of the areas where the mathematical models are considered as descriptively inadequate is the science of human behavior. The so-called rational choice theory for example, is usually considered as a purely normative theory which poses insurmountable difficulties when applied to real world situations. A collection of counterexamples that aim to show this were introduced by Amartya Sen. He uncovers the difficulties that arise from the classical idea that rational behavior reduces to maximization of an acyclic ordering. The choices that people make and which we treat as rational in the intuitive sense of this word are contextually dependent and are affected by the presence of alternatives, which bear information about the nature of the objects of choice and the choice situation itself. The paper offers a formal reconstruction of the functioning of these alternatives – as "flags" that signal the transition from one ordering to another, that mark the conceptualization of alternatives as chances or as risks. This gives rise to an interesting mathematical structure, related to two of the key concepts of order theory (ideal and filter). This structure can be presented axiomatically by means of simple axioms. This shows, in accord with the position of David Hilbert, that there are no areas where mathematics is inapplicable, just fields of research where it is still not appropriately applied.

**Keywords:** applicability of mathematics, behavioral sciences, choice operators, rational choice, revealed preferences.

„Необяснимата ефективност на математиката в естествените науки" (Wigner 1960) е една от най-често цитираните публикации в областта на философията на математиката. Вероятно всички сме виждали последните две изречения: „Чудото на приложимостта на езика на математиката за формулиране на физични закони е удивителен дар, който нито разбираме, нито заслужаваме. Трябва да бъдем благодарни за него и да се надяваме, че ще го запазим и в бъдеще, че за наша радост той ще обхване, за добро или лошо, още много други дялове на знанието". Крехката надежда, изразена в горната фраза, демонстрира наличието на една втора загадка, която е огледален двойник на първата. Ако е трудно да си обясним как и защо математиката е така ефективна в полето на природните науки, то е не по-малко трудно да си обясним как и защо тя е така *не*ефективна в полето на поведенческите науки. Може би наистина бог е „наредил всичко с мяра, брой и тегло" (Прем. 11: 21), но в обхвата на „всичко" изглежда не влиза светът на човека. Разминаването между моделите, чрез които обясняваме човешкото поведение и това, което те се опитват да обяснят, често бива интерпретирането като указание за факта, че въпросните модели трябва да бъдат третирани като нормативни, като описващи един идеализиран субект, който можем да наречем *homo economicus* или TOTREP (*trade-off talking rational economic person*) (Kreps 1988) и който няма много общо с живите хора, за които можем да кажем много неща, но не и това, че можем да ги разглеждаме като идеално рационални максимизатори на очакваната полезност. В тази статия приемам отправеното от Уигнър предизвикателство. Ще скицирам един формален, математически модел на човешкото действие, който претендира за дескриптивна адекватност, макар и в ограничена област, в която човешкото действие може да бъде концептуализирано като избор, изхождащ от основания. Това изисква някои уточнения.

Науката описва, обяснява и предвижда това, което се случва в света. Поведенческите науки описват, обясняват и предвиждат човешкото поведение. Това, което ги отличава от останалите науки, е фактът, че те се позовават на *основания*. Основание за осъществяване на определена постъпка са убежденията и предпочитанията на хората. За разлика от убежденията, предпочитанията се проявяват в нашето поведение: според сполучливия израз на Дженингс те могат да бъдат „спипани със смъкнати гащи“ (Jennings 1967). Избирайки $x$ при наличието на $y$, ние проявяваме предпочитание към $x$ за сметка на $y$. За да приемем, че едно действие, което може да бъде концептуализирано като избор, е успешно обяснено чрез съответно предпочитание, е необходимо да бъде изпълнено едно условие: предпочитанието да бъде *рационално*. Рационалността не е свойство на отделно взето проявено предпочитание, а на система от предпочитания, проявени в различен контекст, иначе казано, при наличието на определени възможности. Предпочитанията са рационални, когато можем да им съпоставим релация (обикновено, слаба, или поне ациклична наредба), която бива *максимизирана* във всеки контекст (Bossert and Suzumura 2010: 7). Иначе казано, рационално предпочитание е налице, когато винаги избираме максималната достъпна алтернатива. Това изключва възможността в един контекст да проявим предпочитание към $x$ за сметка на $y$, а в друг контекст – към $y$ за сметка на $x$. Иначе казано, рационалните предпочитания не подлежат на *обръщане*. Амартя Сен предлага поредица от примери, които целят да покажат, че в някои случаи е възможно подобно обръщане при система от избори, които интуитивно приемаме за *разумни*, иначе казано, при които е понятно какви са основанията, които приписваме на агента, който ги осъществява. Това поставя под въпрос не просто претенцията на теорията за рационалния избор да предоставя критерии за успешност на обяснението, а също нейната претенция да бъде нормативна теория, която описва как е правилно да се постъпва във всеки отделен случай. Ще разгледаме един от примерите на Сен, който показва, че в някои случаи „менюто“, от което избираме, ни предоставя информация за това, което бива предложено за избор и съответно би могло да повлияе на проявените ни предпочитания. Това е прословутият „случай с кокаина“:

„Това, което ни е предложено за избор, може да ни предостави информация за ситуацията, в която се намираме, и съответно да повляе на предпочитанията ни спрямо алтернативите, *както ги виждаме*. В частност, избиращият може да научи нещо относно този, който му е предложил избора, въз основа на това, което той или тя му предлага. Например, имайки избор между това да пие чай в дома на далечен познат ($x$) и да си остане вкъщи ($y$), човек, който избира да пие чай ($x$), може въпреки това да избере да си остане вкъщи ($y$), ако му бъде предложено – от този познат – избор между това да пие чай ($x$), да си остане вкъщи ($y$), или да приеме известно количество кокаин ($z$). Предложеното меню може да осигури информация за ситуацията – в този случай да ни покаже нещо относно далечния ни познат и по този начин съвсем естествено да повлияе върху начина, по който класираме алтернативите $x$ и $y$“ (Sen 2002: 130-131).

В този случай очевидно основното изискване, което произтича от постулатите на теорията за рационалния избор и което забранява обръщането на предпочитанията, е нарушено: от „менюто“ $\{x, y\}$ фикционалният ни субект избира $x$ (проявявайки предпочитание към $x$ за сметка на $y$), а от менюто $\{x, y, z\}$ – $y$ (проявявайки предпочитание към $y$ за сметка на $x$). Означава ли това, че теорията за проявените предпочитания трябва да бъде изоставена? Съдейки по това, че малцина са се опитали да отговорят на предизвикателството, което отправя Сен, изглежда то е повече от сериозно. Заравянето на главата в пясъка е типична реакция към подобни трудно преодолими трудности. Пристъпвайки към анализ на предложения по-горе пример, можем да отбележим, че обръщането на проявените предпочитания очевидно се дължи на това, че в двата случая субектът, който осъществява избора, очевидно преследва различни цели. Менюто $\{x, y\}$ отговаря на ситуация, при която възможностите се концептуализират като *шанс*, съответно целта на субекта е да максимизира очакваната полза. В този случай той трябва да намери отговор на въпроса „Коя е най-добрата от достъпните ми възможности?“. Менюто $\{x, y, z\}$ отговаря на напълно различна ситуация, при която възможностите се концептуализират като *риск*, съответно целта на субекта е да минимизира очакваната вреда. В този случай той трябва да намери отговор на въпроса „Коя е най-малко лошата от достъпните ми възможности?“. Тъй като това са два различни въпроса, съвсем естествено е да се очаква, че отговорите също ще бъдат различни. По-нататък, разликата между двете менюта се свежда до присъствието, съответно отсъствието, на алтернативата $z$, която играе ролята на „червен флаг“. Нейната поява маркира прехода от „позитивна нагласа“ (възползване от шанс) към „негативна нагласа“ (избягване на риск). На свой ред, този преход се проявява в обръщането на предпочитанията спрямо двойката $\{x, y\}$.

Преди да продължим нататък, има смисъл да въведем някои термини, които ще използваме по-долу. Ще означаваме множеството от всички възможни алтернативи с $X$. Съответно, множеството от всички негови подмножества ще означаваме с $P(X)$. Неговите елементи ще наричаме контексти. Под *селективна функция* ще разбираме изображение $C: P(X) \to P(X)$, което има следните свойства:

1. За всяко $S \in P(X)$, $C(S) \subseteq S$ (избираме сред достъпни алтернативи).
2. За всяко $S \in P(X)$, ако $C(S) = \varnothing$, то $S = \varnothing$ (изборът е неизбежен)
3. За всяко $S \in P(X)$, ако $C(S) = S$, то $\#S = 1$ (изборът е дискриминиращ)

Сега трябва да разпределим всички контексти в две групи: позитивни (такива, които отговарят на позитивна нагласа) и негативни (такива, които отговарят на негативна нагласа). За целта е естествено да отбележим следното:

1. Ако контекстът $S$ е позитивен (не съдържа индикации за наличие на риск) и $T \subset S$, то контекстът $T$ е позитивен (елиминирането на алтернативи не може да породи индикации за наличие на риск).
2. Ако контекстите $S$ и $T$ са позитивни (не съдържат индикации за наличие на риск), то контекстът $S \cup T$ е позитивен (обединението на контексти, които не съдържат индикации за наличие на риск не съдържа индикации за наличие на риск).

По отношение на негативните контексти пък можем да отбележим:

1. Ако контекстът $S$ е негативен (съдържа индикации за наличие на риск) и $S \subset T$, то контекстът $T$ е негативен (добавянето на алтернативи не може да елиминира индикациите за наличие на риск).
2. Ако контекстите $S$ и $T$ са негативни (съдържат индикации за наличие на риск), то контекстът $S \cap T$ е негативен (сечението на контексти, които съдържат индикации за наличие на риск съдържа индикации за наличие на риск).

Въз основа на казаното можем да отбележим, че множеството на позитивните контексти ($X^+$) отговаря на дефиницията за *идеал*, а това на негативните контексти ($X^-$) – на дефиницията за *филтър*. При това, както идеалът, така и филтърът са максимални – единствените им разширения съвпадат с $X$. Максималните филтри се наричат *ултрафилтри* – когато множеството $X$ е крайно, всеки ултрафилтър върху $X$ съдържа всички множества, които съдържат определен елемент на $X$ – в случая това е нашият „червен флаг“, предложението, което мотивира промяна в нагласата на избиращия.

Вече приехме, че $\{x, y\}$ принадлежи на $X^+$. Тъй като видяхме, че $X^+$ е идеал, от това следва, че $\{x\}$, $\{y\}$ и $\varnothing$ (подмножествата на $\{x, y\}$) също принадлежат на $X^+$. Освен това приехме, че $\{x, y, z\}$ принадлежи на $X^-$. Тъй като вече видяхме, че $X^-$ е филтър, от това следва, че $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ и $\{z\}$ също принадлежат на $X^-$ (това е очевидно, тъй като тези контексти са допълнения на контекстите, които принадлежат на $X^+$ и допълнението на максимален идеал е максимален филтър). Тъй като $z$ генерира филтъра, който се асоциира с негативните контексти, а $x$ и $y$ принадлежат на идеала, който се асоциира с позитивните контексти, разполагаме с класификация не само на контекстите в две групи (позитивни и негативни), а също и с производна класификация на самите алтернативи в две групи (отново позитивни и негативни). Единствената негативна алтернатива е $z$: това е предложението за употреба на кокаин, което играе ролята на „червен флаг“. Позитивните контексти поддържат частичната наредба $x >^+ y$ (тъй като $C(\{x, y\}) = x$), съответно негативните контексти поддържат частичната наредба $y >^- x, z$ (тъй като $C(\{x, y, z\}) = y$).

По-нататък, можем да отбележим, че $z$ е алтернатива, която е много по-лоша от $x$ и $y$. Точно това ѝ позволява да играе ролята на червен флаг. Ако $z$ попадаше (в някоя от двете наредби) между $x$ и $y$, това нямаше да бъде възможно. Съответно, негативната наредба може да бъде разширена до линейна наредба от вида $y >^- x >^- z$. Двете наредби се различават по относителното местоположение на $x$ и $y$. Сходни съображения ни позволяват да добавим $z$ в позитивната наредба: $x >^+ y >^+ z$. Нека да обобщим: ролята на „червен флаг“, който изисква обръщане на наредбата на алтернативите и преход към негативна наредба може да се изпълнява от алтернатива, която е „много“ по-малко добра от вече класираните алтернативи (в позитивната наредба) и същевременно „много“ по-лоша от тях (в негативната наредба). От това следва, че $>^+$ и $>^-$ се съгласуват по отношение на относителната позиция на негативната алтернатива $z$ спрямо $x$ и $y$.

До този момент се запознахме с агент, чиито избори са подчинени на две различни наредби: позитивна (асоциирана с отсъствието на негативна алтернатива) и негативна (асоциирана с присъствието на негативна алтернатива). Позитивната наредба е асоциирана с максимален идеал в $P(X)$, а негативната – с максимален филтър в $P(X)$, който е негово допълнение. Агентите, при които е налице подобна конфигурация, също могат да бъдат определени като негативни: при тях присъствието на негативна алтернатива е решаващо в смисъл, че детерминира наредбата на всички възможни алтернативи (множеството на всички алтернативи $\{x, y, z\}$ принадлежи на филтъра, който е асоцииран с негативната наредба). Следният пример демонстрира съществуването на позитивни агенти, при които позитивните контексти съставляват филтър, а негативните – идеал:

„Джентълмен, бродещ из непознат град по времето за вечеря, попада на скромен на вид ресторант, в който той влиза с известни резерви. Сервитьорът му съобщава, че няма меню, но тази вечер може да поръча или варена сьомга за 2,50 долара, или стек за 4,00 долара. В първокласен ресторант той би избрал стек, но имайки предвид, че ресторантът е непознат, както и разликата в цените, той поръчва сьомга. Малко по-късно сервитьорът се връща обратно, извинява се многословно и хвърляйки вината върху готвача съобщава, че е пропуснал да спомене, че предлагат също пържени охлюви и жабешки бутчета, които се предлагат срещу 4,50 долара. Нашият герой мрази и едните, и другите и винаги би избрал сьомга пред всяко от тях, но въпреки това отговорът му е: „Чудесно, тогава ще променя поръчката си – бих желал стек“ (Luce and Raiffa 1957: 288).

Засега ще отложим обсъждането на случаите, в които може да има повече от един „флаг“, съответно ще приемем, че менюто включва дизюнктивната алтернатива „пържени охлюви или жабешки бутчета“ ($z$). При това положение отново ще имаме три алтернативи: варена сьомга ($x$), стек ($y$), пържени охлюви или жабешки бутчета ($z$). Съответно, имаме $C(\{x, y\}) = x$ (в първоначалния контекст е избрана варена сьомга), $C(\{x, y, z\}) = y$ (в разширения контекст е избран стек). Тук контекстът $\{x, y\}$ е асоцииран с интерпретирането на алтернативните възможности като рискове (не се знае дали ресторантът е добър, съответно дали стекът ще бъде приготвен добре), а контекстът $\{x, y, z\}$ е асоцииран с интерпретирането на алтернативните възможности като шансове (наличието на пържени охлюви или жабешки бутчета гарантира, че кухнята е добра). Съответно, алтернативата z този път играе ролята на „зелен флаг“, който прави възможно да предпочетем стек пред варена сьомга. Иначе казано, позитивната наредба е $y >^{+} x >^{+} z$ ($z$ отново е по-малко добра алтернатива от $x$ и $y$), а негативната наредба е $x >^{-}$ y и може да бъде разширена както и в предишния случай до $x >^{-} y >^{-} z$. В случая негативните алтернативи са $x$ и $y$, а позитивната алтернатива – $z$. Агентът, който осъществява избора, е позитивен в смисъл, че за него решаващо значение има присъствието на позитивна алтернатива, която е в състояние да обърне негативната му наредба.

Както в предишния случай, и тук допуснахме, че алтернативата, която играе ролята на „флаг“ (в случая, на зелен флаг), е доминирана от $x$ и $y$. Това обаче съвсем не е задължително. Бихме могли да си представим, например, че гладният джентълмен обожава жабешки бутчета и би поръчал тях, ако разбере, че се предлагат в менюто, но същевременно би си направил извода, че все пак нямаше да бъде чак толкова рисковано да си поръча стек. Иначе казано, напълно възможно е алтернатива, която доминира разглежданите до момента алтернативи (а не само такава, която е доминирана от тях),, да изиграе ролята на флаг (червен или зелен). Съответно, от този момент насетне ще допускаме, че $z$ е в състояние да обърне наредбата на $x$ и $y$ тогава и само тогава, когато $x$ *не* принадлежи на $[x, y]$, където „$[x, y]$“ е *конвексната обвивка* на $x$ и $y$ (т.е., множеството на всички алтернативи $w$, за които $x > w > y$ или $y > w > x$, където $>$ е едната от двете наредби). Това ще бъде изпълнено, когато $z$ е много по-добра от $x$ и $y$ (съответно, много по-малко лоша от $x$ и $y$), или много по-малко добра от $x$ и $y$ (съответно, много по-лоша от x и y). Казано накратко: флаговете никога не делят „обикновени“ алтернативи.

Вторият пример („случаят с жабешките бутчета“) демонстрира още един важен аспект на разглеждания проблем: в някои случаи ролята на флаг може да се изпълнява от повече от една алтернатива. За да видим какво се случва тогава, ще положим $z$ = „пържени охлюви“ и $w$ = „жабешки бутчета“. При това положение универсумът ще бъде $X = \{x, y, z, w\}$. Неговите подмножества са 16 на брой и те играят ролята на контексти. В примера е посочено, че всяка от тези две алтернативи е в състояние да накара агента да премине към позитивната си наредба, т.е. да започне да възприема алтернативите в позитивна светлина, като шансове. Това означава, че отново ще имаме идеал под $\{x, y\}$, но тъй като този идеал не е максимален неговото допълнение няма да представлява ултрафилтър. Вместо това ще имаме два филтъра: един над $z$ и втори над $w$:

$I = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

$F_1 = \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{z, w\}, \{x, y, z\}, \{x, z, w\}, \{y, z, w\}, \{x, y, z, w\}\}$

$F_2 = \{\{w\}, \{x, w\}, \{y, w\}, \{z, w\}, \{x, y, w\}, \{x, z, w\}, \{y, z, w\}, \{x, y, z, w\}\}$

Както е видно, двата филтъра имат непразно сечение, а обединението им с $I$ покрива $X$. Това показва, че в общия случай се налага да използваме покритие на $X$ от вида $\{I, \{F_n\}\}$, където $I$ е идеал в $X$, а $F_n$ е семейство от филтри в $X$, генерирани от съответните флагове. В най-общия възможен случай бихме допуснали възможността да имаме различни флагове, които да сигнализират обръщането на различни компоненти на съответната наредба. Най-елементарният случай от този тип би могъл да се получи при универсум с 5 елемента. В случая ще допуснем, че разполагаме с 3 позитивни елемента ($x$, $y$, $z$) и два негативни елемента ($w$, $v$). Позитивната наредба ще бъде $x >^+ y >^+ z >^+ w >^+ v$, а негативната – $z >^- y >^- x >^- w >^- v$. При това, $w$ ще бъде флаг, провокиращ обръщането на наредбата на $x$ и $y$, $v$ ще бъде флаг, провокиращ обръщането на наредбата на $y$ и $z$, а $w$ и $v$, взети заедно, ще обръщат наредбата на $\{x, y, z\}$. При това положение за контекстите с четири елемента (4-елементните подмножества на $X$) ще имаме следните наредби (пропускайки индексите, които се подразбират): 1. $\{x, y, z, w\}$: $y > x > z > w$; 2. $\{x, y, z, v\}$: $x > z > y > v$; 3. $\{x, y, w, v\}$: $y > x > w > v$; 4. $\{x, z, w, v\}$: $z > x > w > v$; 5. $\{y, z, w, v\}$: $z > y > w > v$. Очевидно, в два случая ще имаме $y > x$ (1 & 3); в два случая ще имаме $x > z$ (1 & 2); в два случая ще имаме $z > y$ (2 & 5). Съответно, в един случай ще имаме $x > y$ (2); в един случай ще имаме $z > x$ (4); в един случай ще имаме $y > z$ (1). Това означава, че наредбите, които се реализират в мнозинството от случаите, обуславят циклична наредба на позитивните алтернативи: $y > x > z > y$. Иначе казано, когато позволим подобни локални взаимодействия, анализирането на изборите в контексти, които не изчерпват всички възможни алтернативи, може да доведе до проявяване на циклични предпочитания. Тъй като ацикличността е едно от стандартните изисквания за рационалност (Anand 2009), засега ще изключим разглеждането на случаи като този.

От друга страна, ако в горния пример допуснем, че обръщането на наредбата протича на две стъпки: $w$ обръща наредбата на $x$ и $y$, а двойката $(w, v)$ обръща наредбата на $y$ и $z$ (в този смисъл, наличието на $w$ е предусловие за действието на $v$), ситуацията ще се промени. При това положение за контекстите с четири елемента (4-елементните подмножества на $X$) ще имаме следните наредби (фокусираме се върху относителното местоположение на $x$, $y$ и $z$): 1. $\{x, y, z, w\}$: $y > x > z$; 2. $\{x, y, z, v\}$: $x > y > z$; 3. $\{x, y, w, v\}$: $y > x$; 4. $\{x, z, w, v\}$: $z > x$; 5. $\{y, z, w, v\}$: $z > y$. Очевидно, настъпиха промени в случай (2): $y$ и $z$ размениха местата си (запазвайки разположението си в позитивната наредба). При това положение в мнозинството от случаите ще имаме следното: $y > x$ (в два случая срещу един); $y > z$ (в два случая срещу един) и $x > z$ (в два случая срещу един). Това ни дава наредба, която не е циклична: $y > x > z$. Тази наредба се отличава от позитивната наредба (по относителното местоположение на $x$ и $y$), но и от негативната наредба (по местоположението на $z$, която е последна, вместо да бъде първа). Иначе казано, проявените предпочитания на ниво от 4 елемента ни дават 2 от 3 двойки в позитивната наредба и 1 от 3 двойки в негативната наредба. Това може и да е по-малко, отколкото би ни се искало, но показва, че изглежда е допустимо да приемем, че самите флагове имат структурата на филтър, като наличието на несъставен флаг, съответстващ на алтернативата $w$, е предусловие за наличието на съставен флаг, съответстващ на двойката от алтернативи $\{w, v\}$. Очевидно, това ни дава релация между самите флагове.

До този момент допуснахме, че между множеството на позитивните алтернативи и множеството на негативните алтернативи е възможно единствено еднопосочно взаимодействие: дадена негативна алтернатива може да играе ролята на червен флаг, който да промени позитивната наредба, съответно дадена позитивна алтернатива може да играе ролята на зелен флаг, който да промени негативната наредба. С това изключваме двупосочно взаимодействие между двата типа алтернативи. Причината за това ще стане очевидна, след като разгледаме един типичен пример. Най-малкият универсум, при който е възможно двупосочно взаимодействие, има четири елемента (очевидно това е така, тъй като са ни нужни поне два позитивни и поне два негативни елемента, за да е налице нетривиално взаимодействие между двете наредби). Съответно, нека допуснем, че $x$ и $y$ са позитивните елементи с позитивна наредба $x >^{+} y$, а $z$ и $w$ са негативните елементи с негативна наредба $w >^{-} z$. Ще приемем също, че позитивните елементи доминират над негативните и в двете наредби, като $x$ променя наредбата на $z$ и $w$, а $z$ променя наредбата на $x$ и $y$. Тогава за триелементните подмножества на нашия универсум ще бъде изпълнено следното: 1. $\{x, y, z\}$ поддържа наредбата $y > x > z$ ($z$ обръща позитивната наредба на $x$ и $y$); 2. $\{x, y, w\}$ поддържа наредбата $x > y > w$ ($w$ не въздейства върху наредбата на $x$ и $y$); 3. $\{x, z, w\}$ поддържа наредбата $x > w > z$ ($x$ обръща наредбата на $z$ и $w$); 4. $\{y, z, w\}$ поддържа наредбата $y > z > w$ ($y$ не въздейства върху наредбата на $z$ и $w$). Сега да видим какво се получава по отношение на всяка от двойките на класираните алтернативи: $x > y$ (в 2) и $y > x$ (в 1); същевременно $w > z$ (в 4) и $z > w$ (в 3). Това показва, че 3-елементните контексти в $X$ *не* ни осигуряват никаква информация както за собствения фрагмент на позитивната наредба (т.е. за относителното разположение на $x$ и $y$), така и за собствения фрагмент на негативната наредба (т.е. за относителното разположение на $z$ и $w$).

Това нарушава основното изискване, което стои в основата на теорията за проявените предпочитания: наредбите, които се реализират в определен контекст на избор, при определено меню, да носят информация относно наредбите, които се реализират в разширен контекст на избор. Според това изискване не е необходимо да сме запознати с всички алтернативи и тяхното класиране от страна на агента, за да реконструираме неговите предпочитания. Това е достатъчно основание да изключим от разглеждането двупосочни взаимодействия: допускаме съществуването единствено на зелени или на червени флагове, не и на двата типа *едновременно*. От това следва, че ако $w$ е дума, съответстваща на позитивната наредба на алтернативите, то негативната наредба на алтернативите трябва да има вида $\pi(u)v$, или $u\pi(v)$, където $u$ и $v$ са непразни, конкатенацията на $u$ и $v$ е $w$, а $\pi$ е пермутация на съответната дума. Това гарантира, че винаги ще има или най-добра алтернатива, която може да бъде избрана (при пермутация от вида $u\pi(v)$ това ще бъде първият елемент на $u$), или най-лоша алтернатива, която може да бъде отхвърлена (при пермутация от вида $\pi(u)v$ това ще бъде последният елемент на $v$).

Сега ще видим какво следва от тази дефиниция по отношение на ситуации на избор с малък брой достъпни алтернативи. При два елемента, ако фиксираме едната наредба на $xy$, то и другата наредба трябва да бъде $xy$, тъй като $\pi(x)y = x\pi(y) = xy$, тъй като пермутацията $\pi$ в е тъждествено изображение („разместването“ на един елемент не променя нищо). Очевидно, отсъства взаимодействие, съответно позитивната и негативната наредба на алтернативите съвпадат. Това е най-елементарната възможна нетривиална ситуация на избор: имаме само две алтернативи и една от тях е едновременно най-добра и най-малко лоша. Обърнете внимание на това, че при подобна ситуация не е възможно да кажем дали и двете алтернативи имат еднаква полярност или не: ако имаме негативен агент и $x$ и $y$ имат различна полярност, то ще се проявява само негативната наредба, а позитивната наредба ще остане непроявена, „в себе си“. Аналогично, ако агентът е позитивен, ще се проявява само позитивната наредба, а негативната ще остане непроявена. От казаното следва, че когато алтернативите са само две, са възможни две различни рационални конфигурации: (1) $x$ е предпочитана спрямо $y$ и (2) $y$ е предпочитана спрямо $x$. Третата възможност – (3) $x$ и $y$ са безразлични, следва да бъде изключена, тъй като за да получим подобна конфигурация, е необходимо да имаме две различни наредби, например $x >^+ y$ и $y >^- x$. Това би се случило, когато имаме достъпни алтернативи с различна полярност и някоя от тях играе ролята на флаг, променящ наредбата на $x$ и $y$. Тъй като обаче единствените достъпни алтернативи са самите $x$ и $y$, самите те би трябвало да имат различни полярности, от което следва, че може да се реализира само едната от двете наредби, а другата ще остане скрита. Както показва още тъжната история на Буридановото магаре, безразличието (съответно, липсата на предпочитание) при избор между две алтернативи е ирационално, тъй като изключва възможността за избор.

При три елемента имаме 6 различни пермутации и 3 от тях ще отговарят на рационални предпочитания, т.е. на допустима двойка от наредби, а останалите три – не. Ако фиксираме позитивната наредба на $xyz$, то възможни негативни наредби ще бъдат $xyz$, $x\pi(yz) = xzy$ и $\pi(xy)z = yxz$. Позитивната наредба $xyz$ и някоя от тези три негативни наредби ще кореспондират на проявени рационални предпочитания. От друга страна, другите три пермутации – $zxy$, $yzx$ и $zyx$ не са допустими негативни наредби, тъй като не могат да бъдат представени по описания по-горе начин. Системи от избори, подобни на разгледаните по-горе, генерират два типа наредба, изразяващи два типа предпочитания: опровержими (които са нестабилни при добавяне на нови алтернативи към менюто) и неопровержими (които са стабилни при добавяне на нови алтернативи към менюто). Сега ще видим какви са техните свойства (в най-елементарния случай, когато имаме един идеал и един филтър, като и двата са максимални). Първият тип предпочитания ще означаваме с $W$, а вторите – с $S$. Първо ще отбележим, че за всяка двойка от алтернативи $x$ и $y$ е изпълнено следното: $x$ и $y$ са или $W$-свързани (т.е. $xWy$ или $yWx$), или $S$-свързани (т.е. $xSy$, или $ySx$). Първото ще бъде изпълнено, когато $x$ и $y$ принадлежат на идеал, второто – когато $x$ или $y$ принадлежат на филтър. Накратко можем да изразим казаното дотук така: обединението на симетризациите на $W$ и $S$ покрива $X^2$ (без неговия диагонал, тъй като $W$ и $S$ са ирефлексивни по дефиниция). Второто, което можем да отбележим, е, че съчетанията на $W$ и S могат да бъдат характеризирани аксиоматично. Що се отнася до $W$ ще имаме следното: да допуснем, че $xWy$ и $yWz$. Това означава, че двойките $\{x, y\}$ и $\{y, z\}$ принадлежат на $I$. От това ще следва, че $\{x, y, z\}$, съответно $\{x, z\}$ принадлежат на $I$, следователно $xWz$. Що се отнася до $S$, ще имаме следното: да допуснем, че $xSy$ и $ySz$. Това означава, че двойките $\{x, y\}$ и $\{y, z\}$ принадлежат на $F$, съответно сечението им $\{y\}$ принадлежи на $F$. От това ще следва, че филтърът е построен върху $y$, съответно $\{x, z\}$ принадлежи на $I$ (допуснахме наличието на само един флаг). От това следва, че $xSy$, $ySz$ имплицира $xWz$. Трето, можем да отбележим, че съчетанието на $S$ и $W$ принадлежи на $S$. Наистина, да допуснем, че $xSyWz$. Тъй като $yWz$ от това следва, че $\{y, z\}$ принадлежи на $I$, съответно $\{y\}$ принадлежи на $I$. Тогава $x$ принадлежи на $F$ (тъй като $\{x, y\}$ принадлежи на $F$). От това следва, че $\{x, z\}$ принадлежи на $F$ и ще имаме $xSz$. Обратно, да допуснем, че $xWySz$. По същия начин можем да покажем, че $z$ принадлежи на $F$, от което следва, че $\{x, z\}$ принадлежи на $F$ и имаме $xSz$. По този начин установихме, че са изпълнени следните съотношения:

1. $\mathrm{Sym}(W) \cup \mathrm{Sym}(S) = X^2 \setminus \Delta_X$.
2. $\mathrm{Sym}(W) \cap \mathrm{Sym}(S) = \varnothing$.
3. $W \circ W \cup S \circ S \subseteq W$.

4. $W \circ S \cup S \circ W \subseteq S$.

Любопитен момент е, че подобни двойки от релации бяха проучени относително наскоро (Disanto *et al.* 2010) и беше установено, че те имат интересни връзки с комбинаториката. Това показва, че съотнасянето на двойка наредби на двойка от максимален идеал и максимален филтър поражда математически нетривиална структура, която си струва да бъде анализирана по-подробно. Връщайки се към въпроса, който беше поставен в началото, можем лесно да разберем защо в отсъствието на съответни модификации математическите техники, разработени в областта на природните науки, не могат да бъдат ефективно прилагани в поведенческите науки. Това е свързано с контекстуалните интеракции между алтернативите, които кореспондират на информационни взаимовръзки и режими на функциониране на агента, който осъществява избора, лишени от пряк аналог в света на природата. Все пак, основание за действие е не просто това какво е налице и това е свързано с „епистемичното значение на менюто“, за което говори Сен. Изглежда, че светът на човека също е подреден според „мяра, брой и тегло“, макар и не точно по същия начин като природния свят. Неефективността на математиката в определена област е свидетелство единствено за това, че съответните математически техники все още не са напълно кристализирали. Това, разбира се, не е ново: Хилберт казва същото (Hilbert 1930).

## Библиография

**Anand P.** 2009. Rationality and intransitive preference. – In P. Anand, P. Pattanaik & C. Puppe (Eds.) *Handbook Rational and Social Choice*. Oxford: Oxford University Press.

**Disanto F., Ferrari, L., Pinzani R. & Rinaldi S.** 2013. Catalan pairs: a relational-theoretic approach to Catalan numbers. // *Advances in Applied Mathematics*, 45, 505-517.

**Bossert W. & Suzumura K.** 2010. *Consistency, Choice and Rationality*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

**Hilbert D.** 1930. Radio address. Mathematical Association of America, 2014. *Updated June 3, 2022. Available at*: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-english-translation>.

**Jennings R. E.** 1967. Preference and choice as logical correlates. // *Mind*, 76(304), 556-567.

**Kreps D. M.** 1988. *Notes on the Theory of Choice*. Boulder: Westview Press.

**Luce R. D. & Raiffa H.** 1957. *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Hoboken, NJ: Wiley.

**Sen A.** 2002. Maximization and the act of choice. – In A. Sen. *Rationality and Freedom*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

**Wigner E.** 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. // *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14.