Числови множества и Абсолютният континуум на числата

Силвия Владимирова Кръстева
Югозападен университет „Неофит Рилски“ – Благоевград
silvia_kristeva@swu.bg

Number Sets and the Absolute Number Continuum

Silviya Vladimirova Kristeva
South-West University “Neofit Rilski” – Blagoevgrad
silvia_kristeva@swu.bg

Резюме: Дедекинд поставя въпроса за непрекъснатостта в конструирането на числовите множества, а Кантор реализира тази концепция, извеждайки безкрайните числа като нов вид числа. Как тези значими инвенции се отнасят към общата теория на числата ще е предмет на настоящата студия. Кантор дефинира числата и числовите множества в наредбата им на безкрайно следващи по своята мощност, конституирайки така „абсолютно безкрайната тоталност на числата“, или *Абсолютния континуум*. Така обаче построяването на самото число и редицата от числа трябва да взаимодейства с абсолютния континуум, което осигурява разширение и дори завършване на теорията на числата. В тази възможност се открива преход и връзка между числовите множества. Дедекинд пък демонстрира тази връзка чрез съответствието на множеството от точки на правата линия и множеството на реалните числа. Едно усилване на неговата концепция за непрекъснатия домейн на реалните числа изисква извеждането на дълбоката геометрия на правата линия.
Ключови думи: Кантор, Дедекинд, теория на числата, безкрайни числа, дълбока геометрия.

Abstract: Dedekind raises the question of continuity in the construction of number-sets, and Cantor implements this concept, deducing infinite numbers as a new kind of number. How these significant inventions relate to general number theory will be the subject of the present study. Cantor defined numbers and number-sets in their order of infinite succession in power, thus constituting the “absolutely infinite totality of numbers”, or the *Absolute Continuum*. Thus, however, the construction of the number itself and the series of numbers must interact with the absolute continuum, which provides an extension and even completion of number theory. In this possibility, a transition and connection between number-sets is found. Dedekind demonstrated this connection through the correspondence of the set of points on the straight line and the set of real numbers. Dedekind’s conception of the continuous domain of the real numbers requires a certain strengthening through the deep geometry of the straight line.
Keywords: Cantor, Dedekind, theory of numbers, infinite numbers, deep geometry.

В хода на своята уредба математиката поставя своята генерална област над количеството, мярата и измерността и инструментите за тяхното отчитане и пресмятане. От характеристиките на самия ѝ предмет се оформя изискването за определимост на това количество, като величина, но и тъкмо с оглед на чистата величина и самото ѝ определяне – и конституцията на величината, в нейното максимално разширение и дори движение, за да овладее обхвата и на предмета, и на инструмента. Така възникват два може би достатъчно отделими домейна, отделими според типа количество и измерност – *домейнът на числата* и *домейнът на фигурите и пространствата*. Не толкова отделени в *Елементи* на Евклид, като развити по-скоро под числото на мярката и измерването, оттук двата домейна се раздалечават все повече, макар модерната математика именно да развива области на тяхното свързване. Дали и в сферата на математиката, както в сферата на физиката, не трябва да се потърсят началата на една обща теория на всичко? Тази особена синхронизираща точка, обаче, изисква стъпки и основания в извличането на онова, което не само основава, но и някак завършва, окомплектова и двата домейна. В този особен край и връх на математиката започва да се оформя един концепт – концептът за „абсолютния континуум“ на числата, но и на фигурите, който Ф. Ерлих поставя на най-високо място в съвременната теорията на числата, привеждайки като мото един знаменит цитат на А. Франкъл и др. от тяхното изследване „Основи на теория на множествата“ (1975): „Хвърлянето на мост над пропастта между домейните на прекъснатостта и непрекъснатостта, или между домейните на аритметиката и геометрията е централен, вероятно дори централният проблем на основанията на математиката“ (Ehrlich 2012: 1).

Именно това ще е и целта на тази студия – да генерираме произхода на концепта за „абсолютния континуум“ на числата и да изведем мястото му в съвременната теория на числата. При възникването на тази основа на числовата теория се развиват и важни теми за отношението на понятието за числови множества и геометричното им проектиране, които носят значими решения и проблеми в общата теория на числовите множества. Така ще покажем връзки и ще изградим репери на отношения между теория на числата и възможностите на геометрията. И ще демонстрираме основното, – че концептът за „абсолютния континуум“ застава като централен проблем и подстъп към изясняване на основанията на математиката и за указване към собствения ѝ хоризонт и завършване.

За изграждане на цялостна теория на числата математиката не може да подмине един проблем, който се оказва все по-значим, колкото по-ясно идва на фокус пред математиците. Това е проблемът за непрекъснатостта в редицата на числата или, както го формулира Рихард Дедекинд: за „придобиването на непрекъснат числов домейн (number-domain)“ (Dedekind 2007а: 1). А това ще рече, да се дефинират числа, които са непрекъснати: или които имат своята особеност и структура да притежават безкрайността. Математиците през късния 19-и век най-накрая се изправят лице в лице с проблема за безкрайността и нейното количествено изразяване и определяне. Дали тази безкрайност ще определя движението на редицата на числата – както е при базовите естествени числа, продължаващи да растат до безкрайност, или ще се съдържа в самото число, като неспирна поредица от неговите цифри, както е при ирационалните числа, особено при т.нар. трансцендентни числа, например числото π, проблемът с участието на безкрайността при дефинирането на числата и на „тялото от числа“ (Dedekind 2007а: 2) остава да бъде решен в математическата теория. Дедекинд го определя и много по-широко: „да се изследват всички непрекъснати домейни“ (Dedekind 2007а: 5), с които математиката разполага въобще. А оттук и естествено възниква въпросът – каква е връзката на тези домейни един с друг, както е при „прекъснатите“ домейни на числата. А има ли въобще дефиниране и ред при числата, без това отиване до безкрайност? Очевидно и аксиоматично, математиката разполага своята сила тъкмо в това дихотомично, и дори контрадикторно, разделение на крайно и безкрайно, и то не е извор на нейната слабост и дори несъстоятелност, а трябва да се приеме точно обратното: като собствения ѝ елемент, собствена стихия и като фундаментално отношение, единствено от което произлиза същинската ѝ сила и инструментариум да оперира с количеството и измерността. Може би дори това отношение крайно – безкрайно позволява да се подходи към същинските мостове между двата фундаментални домейна на числата и на фигурите и пространствата.

I. Дефиниране на числата

Числата са основополагащ „изключително полезен инструмент за човешкия ум“, както го назовава Р. Дедекинд (Dedekind 2007а: 2), в математиката, израз на едно определено количество. Но с факта на цифрите те влизат в математиката някак предзададени. Едно философстване върху математическите начала трябва да постави въпроса за „природата на числото“ (Dedekind 2007б) и за метода на неговото възникване като математически инструмент. А това отваря много възможности пред математическото фундиране, използвано от големите математици и теоретици в изграждане на собствената им математическа концепция. Кои специфични схващания довеждат обаче до „революцията“ в математиката, осъществена от Георг Кантор (Jourdain 1915: i) и до извличане на фундамента на математиката, за какъвто е обявена теория на множествата, развита от Кантор (вж. Кръстева 2018).

За да дефинираме едно число, трябва да определим неговото предназначение, т.е. за какво точно количество то отговаря, и оттам и неговия собствен строеж, както постановява Вайерщрас: „Казваме, че едно число е „определено“, ако знаем от какви елементи то е съставено и колко пъти всеки елемент се появява в него“ (цит. по Jourdain 1915: 18). Това е изключителна формулировка – тя навлиза към природата на числото като самостоятелен обект, със своя структура от елементи и с конкретен метод, операция на взаимодействие на тези елементи. Това поставя числото повече, даже почти напълно, като самостоятелно „творение“ на математика, задаващ числата. Дедекинд тук е напълно ясен: „числата са свободни творения на човешкия ум, те служат като средство за схващане различието на нещата“ (Dedekind 2007б: 14). Дедекинд предназначава числата към рефериране на нещата, както и Кантор – те служат за все по-съвършено моделиране на реалните процеси в действителността. Но Кантор много по-силно отдава тяхното значение на вътрешния мисловен акт, с който се конструира едно число: „като една абстрактна картина в нашия ум“, „една интелектуална картина, едно общо понятие, е генерирано в нас“ (цит. по Jourdain 1915: 80). С което става явна и новата математическа цел на Кантор: не само дефинирането на числата като такива, в познатия режим на естествените цели числа, а отиване отвъд тази редова представа за числото и обхващане на самата редица на числата, в случая на естествените числа, с нейната специална характеристика да отива до безкрайност. Това е и целта на Кантор: да постигне истинско „разширение на теорията на числата“ (цит. по Jourdain 1915: 52). И двамата велики математици всъщност са търсели решение на въпроса: как да се обхванат цялостните възможности на числата да представят и да изразяват количество? И как всъщност да се дефинират тези цялостни възможности: каква е изобщо ултимативната цел на числата?

Всъщност в съвсем началното поставяне на числото и Дедекинд, и Кантор приемат въвеждането в числото, направено още от Евклид в *Елементи*. В Книга седма на *Елементи* е поставена основата на елементарната теория на числата. Евклид започва с дефинирането на единицата в Първото положение и я обосновава тъкмо в кореспонденция със съществуващите неща, с обособени предмети: „1. Единицата (*монас*) е [това], според което за всяко съществуващо нещо е казано, че е едно“ (Euclid 2008: 194). Веднага следва образуването на останалите числа от единицата: „2. И число е много (multitude), съставено от единици“ (Euclid 2008: 194). Единицата е основен елемент на числото, а нейното повторение образува всяко едно друго число, като в това дефиниране са заложени както основните типове естествени числа – четни, нечетни, прости, степенувани, така и възможността за образуване на други числа: ако те не могат да се образуват с този елемент – „цялата“ единица.

Дедекинд също тръгва от такъв елемент – полагането на самостоятелната предметна единица, макар да я влага в една по-обща конструкция на множеството от такива обекти. За него обаче единицата, с предметното ѝ определение, е все още важна, тъй като единицата определя един устойчив обект за отмерване, с една своя позиция, както по-късно ще разгледаме, това е геометричната точка. Дедекинд дефинира началното полагане на едно нещо: „разбирам под *нещо* всеки обект на нашето мислене“ (Dedekind 2007б: 21). Отделните неща, означени с a, b, c, „формират системата S“, с което е въведена тяхната определена съвкупност, която Дедекинд нарича „система“, като всяко от тези неща е „елемент“ на системата S (Dedekind 2007б: 21). Същевременно за което и да е от нещата от съществено значение е дали принадлежи на системата S или не (Dedekind 2007б: 21), което е логическият закон за съставяне на тази система. Изключително важно е, че Дедекинд предвижда и система, т.е. множество, без нито един елемент, наричайки я „празна система (empty system)“ (Dedekind 2007б: 21). С това съвкупността е конституирана като онова, което удържа и съвместява елементите-единици и така може да бъде в известен смисъл дефинирано преди тях, а със сигурност като основа за числата. Ще отбележим само още, че Дедекинд въвежда и система с безкрайно съдържание на елементи, за която постулира, че е такава, ако една част от системата е „подобна“ на цялата система, защото част от една безкрайна система трябва да е също безкрайна (Dedekind 2007б: 31).

Дефинирането на числата в логическия режим на обеми от елементи показва, че началният общ елемент от структурата на числата не трябва (или още не е задължително) да са предметните единици, а самата тяхна съвкупност, тъкмо като нов общ елемент от техния строеж. Това е новото, което предприема Г. Кантор. Той подхожда към теорията на числата с началното дефиниране на множеството от дадени неща, което изрично обявява в *Приноси към теорията за трансфинитните числа* (*Contributions to the Theory of Transfinite Numbers*): „схващането на едно множество като „едно цяло“ (Cantor 1915: 85). „Събирането“ на числата се превръща в самостоятелна формация със свой акт. Този акт е с логически характер, Кантор го определя като „закон на цялото, на единството (unitary law)“ (Cantor 1915: 109) при събирането на многото. С този закон всяка една съвкупност от неща се превръща в „органическо цяло“ (цит. по Jourdain 1915: 74) и се схваща като „едно“ (цит. по Jourdain 1915: 54). Формулировката на унитарния закон гласи: „ако се абстрахираме от природата на елементите и от реда, по който са дадени, ще получим кардиналното число или мощността на множеството“ (цит. по Jourdain 1915: 74) и се отнася образуването на всяко едно множество.

Този особен акт на единството за всяко едно множество дава на Кантор възможността за общо схващане на *цялото* множество и ще е решаваща стъпка за дефинирането и конструирането на числата. В цялото Кантор заличава различното полагане на отделните елементи и как те са структурирани в конкретната съвкупност. Нарича тези действия: „двоен акт на абстракция“, както от „природата на различните елементи“, така и от техния ред (Cantor 1915: 86). С това получава пълен интелектуален образ ва чистото количество на множеството: а това е точният брой на неговите елементи. Това е изцяло ново понятие и измерител за едно множество, което Кантор нарича „мощност“ (power) на съответното множество. Мощността е така определена величина, която се изразява чрез едно число – това е броят на елементите в множеството: „и това число има съществуване в нашия ум като интелектуален образ или проекция на даденото множество М“ (Cantor 1915: 86).

С всичко това е поставена основата на теория на множествата, но и на извеждането на числата при Кантор. На всяко число съответства определено множество от елементи, мощността на това множество основава съдържанието на съответното число. Но следователно няма число без съответстващата му мощност на едно множество. А тогава важи и принципът, че всяко едно множество има мощност, а оттам и определено количество, което задава съвкупността на неговите елементи. Кантор нарича това число, което съответства на неговите елементи, негово *кардинално* число.

Чрез общите конституенти „множество“ и „единичен предмет“ Кантор дефинира естествените числа. Първо въвежда единичното множество E_0, което съдържа едно единично нещо e_0, и получава E_0=(e_0), с което дефинира числото 1: „на множеството E_0 съответства като кардинално число това, което наричаме „едно“ и означаваме с 1“ (Cantor 1915: 98).

След това създава следващото множество, чиито елементи са E_0 плюс началното единично множество и още един елемент e_1, с което получава „E_1=(E_0, e_1)= (e_0, e_1). И чието кардинално число е 2“ (Cantor 1915: 98).

С постоянното прибавяне на нови елементи Кантор извежда „редица (series) от множества“ (Cantor 1915: 97). Редицата на естествените числа е така вече изразена като редица от множества, всяко от тях е получено непосредствено от предходното с прибавяне на един нов елемент. Техните мощности образуват именно редицата от числа, които са N-числа, естествените число от множеството N, и които Кантор нарича „финитни (крайни) кардинални числа“ (Cantor 1915: 97).

С извеждането на числата Кантор получава едно ново множество: то е множеството на финитните кардинални числа. Разбира се, че то има особени свойства, първото от които е неговият специален ред: елементите в него произлизат един от друг. Имат точно нарастваща стойност. Но какво ще стане, ако и на това множество се приложи законът на единството, унитарният закон на Кантор за образуване на множествата? И всички елементи без значение на тяхната природа, възникване и ред се споят до едно органично цяло. Ще има ли това множество своя мощност и каква ще бъде тя?

Редицата на естествените числа продължава до безкрайност. Не може да се намери най-голямо естествено число (поне в стандартната теория на числата). Тогава възниква въпросът за количеството на това безкрайно множество, т.е. за неговата мощност или за неговото кардинално число. То не може да е от редицата на финитните кардинални числа, следователно трябва да не е крайно, а така да е безкрайно кардинално число. В противен случай трябва да обявим, че N – множеството на естествените числа, няма мощност или че N не може да е множество. С тази абсолютно революционна и смела крачка Кантор предприема обосноваването и въвеждането на безкрайни кардинални числа, защото, следвайки аксиомата на образуване на множествата, всяко едно множество трябва да има своя мощност и оттам свое кардинално число.

Към областта на крайните числа в математиката Кантор открива и присъединява една изцяло нова област – областта на безкрайните числа. С това допълва и едва така поставя началото на завършването, но окомплектоването на цялостната теория на числата. Но безкрайните числа според Кантор не могат да бъдат дефинирани със средствата, с които математиката борави с крайните числа: по думите на Кантор, не може „теоремите, с които присъждат всички свойства на крайните числа“ да важат за „безкрайните числа (infinite numbers), които, ако са мислими в някаква форма, трябва да конституират нов вид числа, като противоположни (opposed) на крайните числа“ (цит. по Jourdain 1915: 74). Тъй като те изникват върху редицата на естествените числа и са *отвъд* всеки един край на тази редица, а единствено я полагат в нейната чиста мощност, като определено количество, брой, на елементите, Кантор нарича този нов вид числа „*трансфинитни числа*“.

Кантор обосновава новия вид числа като „безкрайни числа“ и като „определена форма на завършеното (completed) безкрайно“ (цит. по Jourdain 1915: 53). Това означава, че трябва да има различни видове безкрайни множества, а не само с общо и несъществено количество, обозначено със знака за безкрайност ∞ (цит. по Jourdain 1915: 55-56). А това води и до изникването на различни мощности на тези множества, а оттам и до различни трансфинитни кардинални часла. За Кантор тези безкрайни числа представят актуално безкрайното, като едно цяло с определено, макар и безкрайно, количество, което трябва да се изрази и дори да се изчисли с определена величина. И тук „определено“ е самото изразяване на тази величина с нов вид числа. Трансфинитните числа така са оформени количества на безкрайното, Кантор ги дефинира точно като „модификации на актуално безкрайното“, каквито са според него и ирационалните числа (цит. по Jourdain 1915: 77). Точно така постепенно се заражда теорията за континуума – в цялост на своето количество като безкрайното, чиито модификации са онези числа, които са безкрайни или имат своя безкрайна част. Именно така – чрез модифицирането на безкрайното – трансфинитните числа запълват съществуващата празнота в математиката по отношение на работата с безкрайното количество, и така изобщо със самото генериране на количеството и на неговата определеност.

Необходимостта на извеждането на първото трансфинитно число от Кантор лежи върху формирането на цялото на безкрайното множество N – числовото множество на естествените числа, като базовите числа изобщо в математиката. Това е „материалът“ (по Jourdain 1915: 79), необходим за неговото извличане. Негов елемент е „мощността“ – кардиналното число на всяко едно множество. С това Кантор въвежда мощността на N, безкрайното множество на естествените числа с ν-елемента, което дава първото трансфинитно кардинално число. Означава го с Алеф-нула: „Първото трансфинитно множество е дадено чрез тоталността на крайните кардинални числа ν. Наричаме го „Алеф-0“ (Aleph-zero) – $\aleph_0$“ (Cantor 1915: 103). То е първото и така *най-малкото* трансфинитно число. Но има свойството да е по-голямо от всяко едно крайно цяло число, колкото и голямо да е то, тъй като $\aleph_0$ не е последното крайно число, а е число, образувано върху *цялото* на редицата на естествените числа. А е първото, тъй като естествените числа са същински крайни числа и са базовото, първично дефиниращо числата изобщо, числово множество. $\aleph_0$ всъщност трябва да представлява единицата за безкрайните числа, така както я имаме в основата като елемент и акт за съставяне на редицата на крайните числа. $\aleph_0$ е тогава самото начало и основа за изграждане на безкрайните числа: „възниква въпросът за по-високи безкрайни кардинални числа и как те произлизат от $\aleph_0$“ (Cantor 1915: 109).

Очертават се много нови въпроси: Как $\aleph_0$ се отнася към N като към числово множество? Има ли и други безкрайни числа? Как те се извличат на основата на другите типове безкрайни множества? Какво е отношението на безкрайните числа и тяхното множество/множества и познатите числови множества? Към основата на тези въпроси ще се приближим с поглед към вътрешния механизъм на произвеждане на числата.

Изводи от I част:

1. Компонентите на числата имат своя нова база – в общото цяло на съвкупността на техните индивиди, които са в основата на броенето. Това е множеството от елементи, индивиди.

2. Всяко множество така е съставено върху определено количество от елементи.

3. Това определено количество задава общия брой, като величина, на елементите, наричан от Кантор мощност на това множество и изразен с „кардинално число“. Всяко множество има своя мощност, респективно свое кардинално число.

4. На мощността на крайните множества съответства крайно кардинално число. На безкрайните множества съответства безкрайно кардинално число, както Кантор го назовава, „трансфинитно“ кардинално число.

5. Алеф-0 е първото и най-малко трансфинитно число, то е трансфинитното кардинално число на безкрайното множество на естествените числа.

6. Типовете безкрайни множества ще определят трансфинитни числа, което поставя въпроса за възможна „редица на трансфинитните числа“ (Cantor 1915: 109).

II. Произвеждане на числовите множества

С новия логически апарат и в новата проекция на числата възниква възможността да се дефинират множествата, съставени от числа, т.е. от определени количества. С инструментариума на Кантор – това ще са множества, съставени от кардинални числа или от мощностите на тези множества. Как се генерират изобщо числовите множества? Може ли това да бъде един цялостен „ чисто логически процес на построяване на науката за числата“ (Dedekind 2007б: 14), както го дефинира Дедекинд? Той вижда тази логическа генерация на числовите множества в необходима връзка с проблема за „непрекъснатия числов домейн“ (Dedekind 2007б: 14). А Кантор поставя общо „въпроса за определението на различни мощности на множествата в цялото на природата“ (цит. по Jourdain 1915: 75), като така подчертава истинската цел и възможности на числата и специално на новите трансфинитни числа. Ако сме в състояние да изведем генерациите от числови множества, в каква обща организация трябва да ги положим и как това ще определи изобщо структурата, целта и възможностите на числата?

Тези въпроси започват да очертават единен облик на теорията на числата. Върху какви принципи трябва да се основе произвеждането на числата, като в тези операции те образуват дефинирани числови множества. Според Дедекинд в основата на този логически генезис трябва да се постави аритметиката и, по-точно, „броенето“ (Dedekind 2007a: 2). То въвежда базовото числово множество N – на естествените числа, формирайки „безкрайна редица от положителни цели числа“ (Dedekind 2007a: 2). В тази редица всяко число, всеки член е дефиниран непосредствено от предишния и е произведен чрез ясен механизъм: присъединяване на единицата. Тези две условия отговарят точно на дефиницията на К. Вайерщрас за същността на числото. Дедекинд въвежда два типа фундаментални операции за произвеждането на базовите числови множества. Първият тип операции са с „неограничен характер“, докато вторият тип се основава на „ограничение или лимитация“ (Dedekind 2007a: 2). Първият тип въвежда две операции: базовия „първоначален акт“ (прибавянето на единицата) и повторението му, за да се произведат неограничено и непосредствено нови числа (Dedekind 2007a: 2). Тези числови структури се основат на операциите събиране и умножение и генерализирани дават домейна на естествените числа.

Вторият тип въвежда лимитацията на първоначалния акт и се основава върху индиректни операции, с които се стига до отнемането и разделянето, или това са изваждането и делението. Специален случай на лимитацията, даже според Дедекинд отличен като трети акт, е произвеждането на пропорциите и степените, чрез които се въвежда „нов креативен акт“ и се получават „негативните и дробните числа“ (Dedekind 2007a: 2). Ако обобщим, Дедекинд въвежда двата акта: на повторение и на лимитиране за произвеждане на числата, включвайки така фундаментални аритметически операции. Основава се на идеята, че тези основни математически операции водят до получаване на базови числови множества, като в основите е заложен принципът на единицата и в акта, в дефиницията на числото. Получените числови множества са на естествените числа, на целите числа, на рационалните числа и на ирационалните числа. Като тъкмо дефинирането и изследването на природата на ирационалните числа е целта на Дедекинд в неговата статия. Той го определя така: „Понятието за степен (Ratio) на две числа от един и същи вид може ясно да бъде развито само след въвеждане на ирационалните числа“ (Dedekind 2007a: 5). Това е и числовото множество, което той вижда като извеждането на един (и дори първият) непрекъснат числов домейн. Всяко от получените числови множества е в своята тоталност безкрайно множество, безкрайна редица от числа. И всяко множество се конституира върху въвеждането на трансфинитно число. Чрез изведените принципи се въвежда и се демонстрира определена връзка по генериране между тези базови числови множества.

Кантор формулира своите принципи за произвеждането на числата като принципи на генериране на числови множества, и по-специално на *нови*, нововъведени числови множества. Принципите на произвеждането са насочени към създаването на нови числови множества и не се основават на базовите математически операции.

Първият принцип на генериране при Кантор полага самата възможност за добиване на едно ново число. Този принцип потвърждава, че всяко числово множество има своя определена мощност. Новото число се получава чрез „изразяване на цялото обединение” на един „естествен ред на последователността“ (цит. по Jourdain 1915: 56) на числата. Т.е. всяка една (безкрайна) редица от числа може да бъде схваната до едно цяло и върху това обединение да се изведе нейното количество, т.е. новото число. Разбира се, Кантор обосновава механизма за получаване на първото трансфинитно число, върху цялата безкрайна редица на естествените числа. Но всяко едно число е всъщност такъв резултат от схващане на последователност от числа, които водят до него. А така и „изброяват“ неговата „част“ от домейна на числата. Всяко число започва да се определя със своето получаване в домейна на числата изобщо. В голяма степен това е новаторско решение и е изоставяне на принципа на единицата при генерирането на числата. Първият принцип на Кантор аксиоматизира и природата на числата в образуването на безкрайни последователни редици. И това трябва да са тогава с необходимост – редици с нарастваща величина (в противоположната посока – намаляваща съответно).

Вторият принцип на генерирането на числата при Кантор постулира *непосредственото* получаване на числата, дори и спрямо различни числови редици. Новото число „се създава“ спрямо безкрайната редица от числа като „следващото най-голямо спрямо всички тях“ (цит. по Jourdain 1915: 57). То дава точно общият им брой, по мощност и между всички тях и това число „не лежи друга мощност“ (цит. по Jourdain 1915: 59). Всяко едно безкрайно числово множество има точно едно число, което дава неговата мощност. Така следователно, върху основата на новия вид число можем да развием неговата безкрайна редица от определени количества. Тези определени количества също трябва да изразяват безкрайна редица от предходни числа. Така всяко едно число може да основе своя безкрайна редица от други числа от неговия тип. Тези нови числа с необходимост изразяват определени мощности на други множества от числа.

Комбинирани заедно, „първият и вторият принцип на Кантор позволяват да формираме всички разглеждани числа“ (цит. по Jourdain 1915: 59). Нещо повече, чрез тези два принципа числата се генерират в „абсолютна редица от последователни числа“ (цит. по Jourdain 1915: 60), като „последователна формация от числа“ (цит. по Jourdain 1915: 59). Трябва да подчертаем и особено важния момент тук на непрекъснатост: върху едно числово множество се произвежда новото число непосредствено, а всяко число непосредствено произвежда своите следващи членове в непрекъсната поредица. Този изключително важен момент се гарантира от Кантор и с неговия трети принцип на генериране на числовите множества. Този трети принцип е на лимитирането и предписва „лимити на всеки клас“ (цит. по Jourdain 1915: 60). Тези лимити се определят точно от непосредствено следващия и с необходимост по-горен клас от числа, които дават тоталната количествена определеност на предходния. Така „следващото множество се основава върху предходното, което трябва да е с определена мощност“ (цит. по Jourdain 1915: 59-60). Именно така всяко едно числово множество получава своята тотална количествена определеност! Като тя се дава от непосредствено следващия по-висок клас. По третия принцип базовите числови множества и числовите множества изобщо са в необходима връзка на произвеждане едно от друго и на последователност.

Третият принцип въвежда строгата последователност, което е и гаранция за непрекъснатост на числовите множества в целия домейн на числата. Той ни „позволява да дефинираме различни числови класове с непрекъсваема нарастваща мощност в редиците на тези числа“ (цит. по Jourdain 1915: 59). Определянето на едно числово множество става с произвеждането на по-горното. Домейнът на числата се аксиоматизира като една тотална структура от числови множества с непрекъсваема нарастваща мощност. Само в тази тотална организация числата намират своята цел и предназначение. И се въвеждат в един общ процес на генериране на добре-определени (всеки със своята мощност) и добре-наредени числови множества. Всяко числово множество се организира като безкрайна редица, структурирана със своя последователност, и опираща в по-горното ниво на следващото числово множество. А третият принцип „полага успешно определени лимити върху този процес, така че да получаваме естествени сегменти (*Abshnitte*), наречени числови класове, в тази последователност“ (цит. по Jourdain 1915: 60). Тогава всяко едно числово множество представлява определен „сегмент“, „отрязък“, със своя елемент, организация и мощност в домейна на числата.

Трите принципа на Кантор разкриват една грандиозна картина за тоталния смисъл, цел и разгръщане на числата. На първо място те се организират и развиват в свои числови множества, които са част от цялостния домейн на числата. Дедекинд също определя тази обща формация при теорията на числата като: „създаването на чистия непрекъснат домейн на числата“ (Dedekind 2007б: 17), подчертавайки неговата необходима характеристика да е непрекъснат! Което потвърждава и Кантор: „концепцията за континуума“ „може да ясно да се обясни само посредством концепцията за непрекъснатостта“ (цит. по Jourdain 1915: 70-71). Кантор обаче генерализира тази нова и тотална формация до нейния предел и вътрешно организиране. Той разкрива организацията от възходящи и непрекъснато произведени едно от друго числови множества. Според него в „последователната формация на числовите класове винаги можем да отидем по-далеч“ (цит. по Jourdain 1915: 62). И това е задачата на теорията за трансфинитните числа, но и на теорията на числата изобщо. В тоталната проекция на последователността от числови класове, крайни и най-вече безкрайни, се открива цялостният домейн на числата. Кантор го нарича „цялото абсолютно безкрайно множество на числата“ (цит. по Jourdain 1915: 62). И го определя още така: „Абсолютно безкрайната редица от числа така ми изглежда да бъде, в определен смисъл, един подходящ (suitable) символ на Абсолюта“ (цит. по Jourdain 1915: 62). С тези формулировки Кантор въвежда Абсолютния континуум на числата. Абсолютният континуум е първоосновен елемент и област за произвеждане на числовите множества. Абсолютният континуум на числата съдържа всички числа и особено съдържа всички числови множества. Те единствено в своята организация и непрекъсната връзка и произвеждане и следване могат да го развият и изпълнят. Така всяко едно число и всяко едно числово множество заемат своя определен „сегмент“, отрязък от Абсолютния континуум. Целта на числата е именно това – да запълнят Абсолютния континуум, да се организират до неговото развитие. Даже тук Кантор казва „в една диалектическа генерация от концепти“ (цит. по Jourdain 1915: 36), от числови формации. Само с тази обща организация теорията на числата добива пълна аксиоматичност и завършеност.

Дефинирането на Абсолютния континуум показва пътя за развитието на трансфинитните числа, което Кантор поставя: „въпросът за по-високите кардинални числа и как да се процедира от $\aleph_0$ нататък“ (Cantor 1915: 109), от първото и най-малкото трансфинитно число. След $\aleph_0$ трябва да се дадат следващите трансфинитни мощности, съответно на следващите трансфинитни множества. Те трябва да са множествата, които развиват именно Абсолютния континуум в задачата и целта за пълната му организация и насищане.

Това е и проекция на завършването на Абсолютния континуум, както я поставя Кантор, да се изведат „всички познати множества в континуума“ (цит. по Jourdain 1915: 76). Това е и голямата задача: да се определят основните безкрайни множества, които структурират и осигуряват завършването на Абсолютния континуум. Да се определи и изведе връзката на познатите числови множества с Абсолютния континуум. Като и, на тази основа, да се дефинират връзките между самите числови множества, отново в общата им цел да организират и да изпълнят Абсолютния континуум. Това е и истински математически изпълнимата задача и също така дефиниция на безкрайността в математическата теория.

Кантор залага един основен механизъм в търсенето на числовите множества и техните отношения едно спрямо друго и спрямо Абсолютния континуум. Той го дефинира с огромна емоция: „Също така ми се струва толкова забележително, че всеки числов клас – и следователно всяка мощност – кореспондира с едно определено число от абсолютната тоталност на числата и наистина реципрочно, така че на всяко трансфинитно число да има една (γth) мощност“ в континуума (цит. по Jourdain 1915: 62-63). Всяко едно число и респективно всяко едно числово множество са така с необходимост „модификации“, по Кантор (цит. по Jourdain 1915: 77), на Абсолютния континуум. И като такива те имат своя мощност, свое определимо – в Абсолютния континуум – количество. А от своя страна Абсолютният континуум съдържа всяка една възможна определеност на величина или количество и със свойството да сегментира може и трябва да им даде точен и адекватен числов израз. Затова и Кантор определя основната характеристика на Абсолютния континуум като „съвършен“ – т.е. напълно нареден, в своята организация, и то като степени, като количествени модификации на последователно нарастване (което може да се вземе винаги в посока намаляване), и също така „навсякъде наситен (everywhere dense)“ и „свързан“ (цит. по Jourdain 1915: 72). Възникват въпросите как да се определят тези различни мощности и въобще мощностите, с които да се изрази Абсолютният континуум. Най-добре функциониращият механизъм за измеримост е въвеждането на 1:1 съответствие с множеството на естествените числа. Но тази измеримост обаче не може да „измери" разгръщащите се същинско безкрайни множества.

От основните свойства на Абсолютния континуум следва, че навсякъде в Абсолютния континуум се съдържат трансфинитни числа: „следователно съществуват трансфинитни числа във всеки интервал на числовия континуум" (цит. по Jourdain 1915: 37). Тези числа изразяват всъщност в своята степен и елементи тази пълна „наситеност" на количеството в Абсолютния континуум. Оттук започват възможните полагания на числата – първоначално като се въведе специален индивид, съответстващ на всяко едно число: и това е точката, в геометричен смисъл. Тогава абсолютният континуум ще съдържа пълната наситеност на всички (възможни) точки. А всеки един сегмент от него ще е определено „множество от точки" (point-aggregate). Така всяко едно число ще се изрази с дадена точка в континуума, което общо представя неговата количествен сегмент. А така и е вложено в една по-мощна конфигурация от точки, с определена наситеност и организация. Тогава на всяко едно число в континуума ще съответства определена точка. И респективно, на всяка една точка в континуума ще съответства едно определено и определимо количество в Абсолютния континуум. Това се изразява със следното аксиоматично положение: „на всички нумерични величини принадлежи определена точка", като първоначално тази аксиома е формулирана за структурата и определянето на правата линия (Jourdain 1915: 29). Това ще постави и големият проблем за геометричното съответствие на числовите множества и геометричните формации изобщо, който ще даде сближаването на теория на числата и геометрията и ще има интересно решение, със следствията от което ще се занимаем по-детайлно. Ако всяко едно число можем да изразим и да конструираме така, тогава и на всяко едно число съответства определена точка в Абсолютния континуум, то тогава всяка една „числова величина" (с термина на Вайерщрас, цит. по Jourdain 1915: 18), ще има своя сегмент, своя дистанция от и до тази точка в Абсолютния континуум. И тази дистанция, по съответстващите геометрични формации, ще изразява тази количествена величина и ще уплътнява „протежението" ѝ в континуума. Дали и така формулирано, това положение е основа за определяне на мощността на всяко едно число, на всяко едно числово множество в отношение спрямо Абсолютния континуум и спрямо останалите (възможни) формации и числови мощности в Абсолютния континуум. И ще поставим въпроса за геометричните и числови измерности на Абсолютния континуум.

Накрая изключително сериозните резултати на Кантор в обосноваването на новите трансфинитни числа и при въвеждането и дефинирането на абсолютния континуум на числата дават основа за нова организация на общата теория на числата, в една нейна генерална проекция. Това са и аксиоматичните положения, следващи въвеждането от Кантор и Дедекинд на Абсолютния континуум на числата.

I. Всяко число и числово множество имат определено количество, *мощност,* които се гарантират и осъществяват в и от Абсолютния континуум.

Затова и Абсолютният континуум е основа и елемент в производството на всяко число и числово множество.

II. Абсолютният континуум съдържа всички числа и всички числови множества. Той има своя конституция в типовете числа и в базовите числови множества.

Затова е изразим и изпълним чрез тях. Базовата му организация са необходимите в своя тип и в своята непосредственост редици от числови величини, така Абсолютният континуум се изгражда и организира през определени (безкрайни) числови множества.

III. Аксиомата на Вайерщрас, принципите на Кантор постановяват непосредствена връзка между числовите множества: „новите числа са множества на числата, предходно определени" (цит. по Jourdain 1915: 19). Числовите множества, както и числата, произхождат едно от друго. Те организират последователни редици от определени мощности до завършения Абсолютен континуум.

IV. Всяко числово множество, както и всяко число, има своето завършване до изпълване на своето определено количество. Така числата и числовите множества, включително и Абсолютният континуум на числата, имат своите крайни и безкрайни моменти в своето изпълване, за да са числови количества изобщо.

Затова на всяко едно определено число или определено количество съответства в Абсолютния континуум една определена точка, с което то заема своя дял от Абсолютния континуум. Тази точка, или безкрайното приближение към нея, определят неговото количество. Което изразяваме с един числов тип (в Абсолютния континуум).

Затова и Абсолютният континуум има своя определена мощност, която е абсолютно тотална. Числовите множества, базови и конституиращи континуума, следователно трябва да имат основни етажи и величини, с които се реализират основните видове мощности на тоталния Абсолютен континуум.

Затова и цел на числата и числовите множества е изпълването на Абсолютния континуум и постигането на неговата непрекъсната, тотално интензифицирана абсолютна мощност.

III. Геометрично проектиране на континуума

За моделирането на числовите множества са оказват подходящи „геометрични идеи и геометрични нагледи“ (Dedekind 2007а: 2). Филип Джордан подчертава, че представянето на числата с геометрични нагледи е основен подход в математиката от модерните времена, още от Нютон, според когото всяко число има „геометрична основа“, като разбира се, стремежът на новите математици е да изразят природата на числото с математически и логически средства (Jourdain 1915: 14-15). Но геометричното моделиране на числовите множества дава изключително интересни резултати, особено що се касае за числовото количество на познатите множества и за тяхното взаимно отношение. Именно така Р. Дедекинд обосновава ирационалните числа, а неговият резултат се свързва с въвеждането от Кантор на безкрайните числа и с тяхното отношение към множеството на естествените, рационалните и ирационалните числа. Знаем това отношение като Хипотезата за континуума на Кантор (вж. Кръстева 2018).

Позицията на ирационалните числа е особено важна за математиката, тъй като тяхното множество предлага числа с безкраен елемент в своя строеж. Както посочва Ф. Джордан, при обяснението на същността на ирационалните числа математиците дефинират „едно ирационално число като лимит на всички останали числа“ (Jourdain 1915: 15). Но както е и лимит, т.е. то по някакъв начин трябва да завърши като последен елемент множеството на естествените числа N и множеството на рационалните числа Q, така и то трябва да осигури непрекъснатостта на числовата редица. Тъй като се предполага, че ирационалните числа I запълват отворилите се празноти (gaps) между N и Q числата. Според Дедекинд само ирационалните числа са основата на операцията степенуване, т.е. едно по-сложно и n-кратно надграждащо (или разделящо) отношение на числата (Dedekind 2007а: 5). Основанието чрез ирационалните числа да се придобие един още „по-съвършен инструмент“ (Dedekind 2007а: 1) и на всичко отгоре той да е тъкмо първият инструмент за изразяване на непрекъснатостта в числовия домейн, обосновава на Дедекинд освен „схващането на рационалните количествени отношения“ чрез целия спектър на ирационалните числа „алгебрични, също така и трансцендентни“ да се осигурят „смисловите стъпки човек да напредне в създаването на чистия непрекъснат домейн на числата“ (Dedekind 2007б: 17). Тогава множеството на ирационалните числа I придобива изключително значение на множество с особено отношение към конституирането на континуума и на неговото същностно свойство да е непрекъснат.

Дедекинд обсъжда същността на непрекъснатостта, като я вижда в липсата на празнини (gaps) в следването и позициите на числата. Също така важен белег на непрекъснатостта е възможността да се обхванат *всички* числа от съответното множество и никъде да не се намери празнина в насищането с числа. Важен белег тогава е както да няма празнини, така и да няма една последна крайна точка-лимит. Според Дедекинд тази структура на непрекъснатостта трябва и да осигури ред, подреждане във вътрешния ход на числата, както е всъщност характерно за тяхната количествена природа.

Вижда се колко, дори противоположни характеристики, трябва да обеме непрекъснатостта, затова и тя ще изисква въвеждането на нов инструмент, т.е. нов вид числа, които да носят и да изпълняват тези характеристики, в двойния характер и на крайното, и на безкрайното. Каквато обаче е логическата природа на всяко едно определено количество.

Вижда се и как моделирането по този начин на числата, изхождайки от N и Q, като базови числови множества, изисква определени позиции на числата. А отдолу се появява структура, която трябва да поддържа тези позиции и да отчита как те се отнасят една спрямо друга и как те осигуряват реда на числата, по нарастване или намаляване. Според Дедекинд моделирането на N и Q числови множества и оттам на всички *реални числа* може да бъде развито ясно и пълно само със средствата на геометричната измерност. Това е тъкмо организацията, която осигурява непрекъснатостта. И това е правата линия: „домейнът на числата да добие същата завършеност (completeness) и същата непрекъснатост (continuity) като на правата линия“ (Dedekind 2007a: 4). Правата линия е този първи непрекъснат домейн от съставните си елементи – точките, който има безкрайно количество и природа на непрекъснато измерение от тези безкрайно много точки: „Ние приписваме на правата линия завършеност, отсъствие на празнини (gaps), или непрекъснатост“ (Dedekind 2007a: 5). Следователно правата линия е измерна структура, която има, държи позиции за точки, които са непрекъснати, без пролуки между позициите, и без една последна позиция. Как обаче познатите числови множества могат да се нанесат върху правата? И как да се отчетат позициите на ирационалните числа върху нея?

Дедекинд предлага проектиране, изобразяване на числовото множество на рационалните числа Q, което той приема за предходното спрямо множеството на ирационалните числа I и за това, чрез което да се дефинира I множеството (Dedekind 2007a: 5) „напълно да дефинираме ирационалните числа със средствата единствено на рационалните числа“, върху правата L: „сравнение на всички рационални числа с точките на правата линия“ (Dedekind 2007a: 3). На всяко едно рационално число кореспондира „една и само една точка-индивид (point-individual) от L“ (Dedekind 2007a:

4). Но тогава се открива, че между всеки две рационални числа се отварят празнини, които са непопълнени позиции с числови индивиди. Те дават прекъсване в континуитета на правата линия. Остават незаети с числа позиции: „От най-голяма важност е фактът, че на правата L има безкрайно много точки, които не съответстват на рационално число" (Dedekind 2007a: 4). За „запълването" на тези празнини трябва създаването на „нови точки-индивиди, което ще осигури непрекъснатостта на правата" (Dedekind 2007a: 6). Това с необходимост са нови числа, заемащи празните позиции върху L: „правата L е безкрайно много по-богата на точки-индивиди, отколкото домейнът Q на рационалните числа" (Dedekind 2007a: 4). Запълването на правата до непрекъснатостта ѝ, без свободни позиции върху нейното тяло, се дава според Дедекинд от ирационалните числа. По този начин целият числов домейн на правата, т.е. всичките ѝ точки, се образуват от двете числови множества на рационалните числа Q и на ирационалните числа I. А те в своето обединение съставят множеството на реалните числа: „всички реални числа, т.е. всички рационални и всички ирационални числа" (Dedekind 2007a: 7). Тогава множеството на всички реални числа R се състои от R= Q+I. А множеството на всички реални числа съответства на *всички* точки на правата линия. Само една вметка, ако знаем мощността на множеството на рационалните числа Q и на множеството на ирационалните числа I, ще можем да дадем мощността на цялото числово множество на реалните числа, както са проектирани върху правата линия. При сравняване на мощностите при Кантор: обединение на две числови множества в числов израз е равно на сбора от мощностите им (Cantor 1915: 91). А множеството на реалните числа се конституира от двете числови множества: на всички рационални и всички ирационални числа.

Дедекинд моделира поставянето на ирационалните числа извън рационалните числа така: ако вземем което и да е друго – ирационално число, и спрямо една т. O определим неговото разстояние и го нанесем върху L, то „ще открием, че крайната точка не съвпада с никое рационално число" (Dedekind 2007a: 5). На тази нова точка, като определена позиция върху L, трябва да съответства ново число, число, което е извън множеството на рационалните числа.

Между всеки две рационални числа „има безкрайно много различни числа, лежащи между тях" (Dedekind 2007a: 3).

За генериране на непрекъснатостта на точките върху правата L Дедекинд предлага едно ново средство: т.нар. от него „срез" (cut), *Shnitt* (Dedekind 2007a: 6). Това е акт на „разполовяване" на множеството на *всички* точки върху правата в точно два класа. Срезът на L се образува спрямо една и само една точка, именно чиято позиция формира двата класа. Това са също така и два безкрайни интервала от L, които спрямо т. А текат в двете различни посоки (directions) на правата (Dedekind 2007a: 3). Чрез среза Дедекинд формулира същността на непрекъснатостта: „Ако всички точки от правата линия попаднат в два класа, такива че всяка точка от първия клас лежи от ляво на всяка точка от втория клас, тогава съществува една и само една точка, която продуцира това деление а всички точки в два класа, това разполовяване на правата линия в две части (portions)" (Dedekind 2007a: 5). Спрямо точка А срезът се означава като (A_1, A_2), като A_1 и A_2 са двата класа.

Спрямо т. А, която е част от правата, са разделени и спрегнати *всички* точки от правата. Същевременно те са строго разделени по посоката, по хода на правата и могат да бъдат сравнявани по своите позиции от първия и втория клас и обратно. Нещо повече, т. А дефинира непрекъснатостта, тъй като е демонстрирано, че не е последна точка, а след нея има поне още една точка, което е посочено от Д. Хилберт в Архимедовата дефиниция на непрекъснатостта (вж. Hilbert 1950: 15).

Ако сега на мястото на т. А се положи което и да е рационално число, тя чрез своя срез ще определи всички точки по L. Тези точки обаче са също други рационални числа. Дедекинд изследва и дефинира важното свойство на среза (A_1, A_2), ако той се положи върху L, на която са нанесени всички рационални числа, в тяхната редица, т.е. като последователни, че спрямо т. А веднага се разполага количественото отношение: всяка точка от A_1 е по-малка от A_2, или срезът е продуциран от „най-голямото и най-малкото рационално число" (Dedekind 2007a: 6), които са съответно последното число от A_1 и първото от A_2. По този начин има ред на непрекъснато напредване, демонстрирано от двата класа, а така и за всички рационални числа, което е основна количествена характеристика на числовото множество Q, а и на всяко едно числово множество, взето в неговата базово формиране като естествена редица на нарастване на числата (не само на N – множеството на естествените числа). Така за всяка една точка от A_1 ще има съответна по-голяма в A_2, което демонстрира непрекъснатостта, спрямо точка А.

След като спрямо числото, съответстващо на точка А, имаме формиран срез на L, то такъв срез ще се формира и за всяко едно друго рационално число. И този срез ще гарантира непрекъснатост за L за тези числа. Но, както констатира Дедекинд, „съществуват безкрайно много срезове *не* продуцирани от рационални числа" (Dedekind 2007a: 6). Всяка точка, обаче, от правата L генерира такъв срез. Тогава, постулира Дедекинд, „на всеки един определен срез съответства едно определено рационално или ирационално число" (Dedekind 2007a: 7). Затова за точките, на чиито срезове не съответстват рационални числа, се „създава ново ирационално число α“, което „продуцира този срез“ (Dedekind 2007a: 7). По този начин са въведени всички ирационални числа, организирани в последователна редица. По-точно като разполовени в два класа за всички останали ирационални числа като винаги първият клас ирационални числа са по-малки от тези във втория клас.

Дедекинд дори прилага техниката на среза върху отношението на две ирационални числа α и β, като различава случаите: α = β, в съответствие на всички точки от двата класа; α < β, което поставя целият първи срез спрямо α като в по-голямата си част по-малък от втория клас. И третият случай, в който отношението може да се обърне, но тогава β < α, и повечето числа на β ще са по-малки от тези в среза на α.

Всъщност, ако разгледаме техниката на среза на правата L, и вземем две точки, които са рационални (или естествени числа), ще трябва да приложим разполовяването безброй пъти, каквато е техниката на апорията на Зенон, наречена *дихотомия*. За да се придвижим от точка A до точка B, трябва да стигнем средата на разстоянието AB, после до новата среда и т.н., което е деление безкрай на брой пъти. Зенон заключава за абсолютната невъзможност на движението. Но това, което е видял Р. Дедекинд, е, че дори и направено безкрай пъти, в основата на всяко разполовяване има една определена точка от разстоянието между A и B. А самото разполовяване удържа цялата съвкупност от точки на AB, генерирайки следваща и следваща точка по дистанцията. Също така остават още точки след тази разполовяваща точка, което гарантира непрекъснатостта. А покриването на разстоянието все пак напредва, т.е. количеството на дистанцията се увеличава, макар и изключително бавно и с безкрайно малък растеж. Специалното на техниката на Дедекинд е, че той я разпростира по всички точки на правата, което я прави работеща с безкрайното количество точки върху правата. И демонстрира аранжирането на тези точки в реда на числата. Според Дедекинд техниката на среза и продуцирането на непрекъснатостта на L до ирационални точки-числа осигурява базата за „подредено (orderly) аранжиране на всички реални, т.е. на всички рационални и всички ирационални числа“ (Dedekind 2007a: 7), като непрекъснат домейн на правата линия.

Това поставя обаче всяко едно число в едно ново отношение спрямо правата, като един добре-нареден негов числов домейн. Всяко едно число „управлява“ всички останали числа в домейна, поставяйки ги в количествени отношения на нарастване, на ординалност. Всяко число е възможно благодарение на реда на всички преди него, но има свой край, определеност и включва в своята определеност, дори и строеж, и всички, които остават след него. Именно затова, дори и крайно, всяко едно число работи с цялата безкрайна поредица на своя числов домейн в целия универсум.

Дедекинд въвежда инструментът „всички възможни срезове между a и b“ върху правата (Dedekind 2007). Срезовете достигат до все по-дълбоки точки между две рационални числа в това последователно „разполовяване“ на правата в безкрайността от нейни точки. Вайерщрас обаче разглежда тези точки като дадени в комплексната равнина и така дефинира домейни или части от домейни на равнината с безкрайно много точки (Jourdain 1915: 13-14). Този процес цели достигането на „една единствена точка“, последната възможна, която е тъкмо „точката на кондензация“ (Jourdain 1915: 15, 21).

С това възниква въпросът, ако между две рационални числа започват да се продуцират последователни срезове, ще се стигне до все по-дълбоки точки на правата, които по Дедекинд трябва да са ирационални числа. Можем ли да стигнем до една максимално дълбока точка и да я обявим за последната точка на нашия дълбочинен срез. Чрез последователните срезове би следвало да достигаме до все по-наситени, сближени точки по тялото на правата, които все по-плътно попълват празните позиции на правата линия. Същевременно срезовете запазват растежа на числата, тогава не следва ли наистина тази последна точка, като „точката на кондензация“ да е наистина точката, разполовяваща разстоянието между a и b и съответно гарантираща, че дистанцията между тях се е запълнила във всички позиции на правата L между α и β. Този интересен случай заслужава внимание, тъй като остава да се демонстрира, че чрез среза за запълнени *всички* точки, т.е. достигнато е до всяка една точка по правата L и всички нейни позиции са запълнени. Отново – повтарянето на среза от едно рационална число до друго трябва да се осъществи „безкрайно много пъти“, тъй като толкова са точките на насищане, незапълнени между всеки две *последователни* рационални числа. Тук може да видим двете рационални числа именно като последователни в точното следване на тяхната редица, като базово подредено числово множество. Тогава този брой на повторение на среза трябва да има също своя мощност. Което ще е мощността на ирационалните числа в един определен сукцесивен интервал, едно деление, срез, но по базовата подреденост на рационалните числа. Това ще гарантира, че и тези ирационални числа ще бъдат наредени, което се гарантира от среза на Дедекинд. Тогава ще имаме една генериране на мощността на ирационалните числа до запълване на правата, което е с *определена* безкрайна мощност. Защото срезовете в дълбочина ще се повторят безкрайно число, толкова, колкото са ирационалните числа между двете рационални. Срезът на Дедекинд гарантира изчерпване на последователните срезове до последната точка –

трябва да има такава, която е ирационално число и стои между a и b, тъй като всички Q-числа и всички-I числа съставляват всички R-числа = на всички точки на правата L. Ето как количеството числа, взети кардинално като мощност на правата, може да се изчисли в безкраен брой пъти повторение на Дедекиндовия срез и в безкрайния брой на Q-числата в тяхното тотално количество по правата L, т.е. в мощността на множеството на рационалните числа. Това изчисление се води от три основни положения: че 1. Q и I-числата съставляват R-множеството (множеството на реалните числа), а 2. мощността на R съответства точно на броя точки по правата L. 3. Само Q и I-числата са тези, които запълват и *завършват* правата L. Тогава мощността на R, равна на мощността на линеарния континуум (L като съответен числов домейн), ще се състави точно от мощността на Q и от мощността на I.

Изводи от трета част:

1. Първото *не*прекъснато числово множество е това на ирационалните числа, демонстрирано от Дедекинд чрез съответствието с правата линия, като линеарен континуум. Тук трябва да се разграничи участието на алгебричните ирационални и на трансценденталните ирационални числа. Но и ирационалните числа са първите числа с истински безкраен елемент, така че те естествено се демонстрират като непрекъснат домейн, което затвърждава ролята на безкрайните числа и безкрайното количество най-общо за придобиването и за изразяването в математически отношения на непрекъснати домейни.

2. Дедекинд постулира една изключително важна връзка на двете числови множества на Q-числата и на I-числата. Те заедно съставят R – множеството на реалните числа. Същевременно Q и I-числата се оказват взаимно продуктивни в своите свойства да запълват линеарния континуум. Демонстрирано е произлизане на едно множество – R от предхождащите го. С което се установява реално отношение на произвеждане между базовите числови множества.

3. Демонстрирано е съответствие, което води до изключителни резултати за отношението между числовите множества, също така между базовите геометрични формации и числовите множества. Структурата и реда на геометричната формация съответства на структурата и реда на числовото множество. Което поставя също в необходимо съответствие геометричните елементи: точка, права, равнина, пространство и съответното им числово множество. Дедекинд реализира това съответствие за правата линия L. Но остава въпроса за моделите на другите геометрични формации и съответстващите им числови множества. Така всяко едно числово множество може да бъде разгледано като автономна и вътрешно специфична организация и структура, като „тяло от числа (Zahlkörper)“ (Dedekind 2007a: 2), което в тази своя структура, ред и завършване по базовите геометрични формации притежава определена мощност и осигурява тази мощност като определен тип топология на абсолютния континуум.

IV. Дълбока геометрия на правата линия

В производството на непрекъснатостта на линеарния континуум L при Дедекинд има една съществена предзададеност. Това е приемането на правата L като дадена, изпълнена в своята континуална природа. Тъкмо затова обаче възниква интересният въпрос кое гарантира непрекъснатостта на самата права, кое дава нейната характеристика да е непрекъсната и как, разбира се, ще демонстрираме, че върху съответната конституция на правата са попълнени *всички* позиции на точки, съответстващи на ирационалните числа. Точно това е провокиращото питане: как изобщо правата се организира, или е приета аксиоматично като организация от съответните елементи, като една геометрична формация? Това е въпрос за дълбоката, вътрешна конституция на правата. Отиваме отвъд постулирането на правата линия като дадено и очевидно геометрично построение и ще търсим процеса и елементите на нейното дълбинно съставяне и впоследствие аксиоматична процесуална направа до завършено геометрично построение.

Именно защото навлиза като стремеж и изследване на дълбинното ѝ конституиране, този генезис ще бъде означен като *дълбока геометрия* на правата. Терминът вече заема една нова област в информационните науки, която изследва геометрията на съответствие на структурите при огромните масиви от данни в neural networks. По-точното название на това направление е „геометрия на дълбокото учене“, като изследване върху фигурите и елементите в „n-измерните пространства“ (Bronstein et al. 2021: 2) и тяхното структуриране. В тази област има огромна нужда от нови инструменти и от извличане на нови структури и тяхното операционализиране и изследване. Основно, дълбоката геометрия се основава на характеристиките на *симетрията* и *инвариантите* (Bronstein et al. 2021: 1), като броя на трансформациите и повторенията. Основни елементи като геометрични конституенти са точките в едно n-измерно векторно пространство, чрез които се обозначават отделните атоми на информацията и връзките между тези точки като графи, мрежи и т.н. (Bronstein et al. 2021: 2, 9). Това опиране до основните конституенти на едно n-мерно пространство отваря проблеми, които насочват авторите към измерността и общата геометрия на

Евклидовото пространство отвъд неговия „монопол“ към „неевклидовите геометрии“ (Bronstein et al. 2021: 1). Тази необходимост от изучаване авторите виждат в Ерлагенската програма на Феликс Клайн, обявена в неговите лекции и станала емблематична за новото основополагане и изучаване на фигурите и пространствата в модерната геометрия (Bronstein et al. 2021: 1-2). Проекцията към n-мерния континуум е заложена още в изследванията на Г. Кантор, който доказва възможността едно-измерния континуум да е равен на континуума с n-измерения (Jourdain 1915: 41-42), както и възможността за отношения между различни състояния на континуума, като „континуум… съставен от много отделни континууми“ (Jourdain 1915: 72-73). Но дълбоката геометрия отива към същинската „безкрайна измерност“, която няма как да се овладее до „ниско-измерното пространство“, защото се губи огромна информация, огромно повторение и запазване на данни от „високо-измерното пространство“ (Bronstein et al. 2021: 8-9, 10). Ето защо въпросът за измерността и нейното операционализиране остава изключително актуален.

Основната аксиоматична характеристика на правата е, че тя е непрекъсната геометрична формация и е съставена от „безкрайно много точки“ (Hilbert 1950; Dedekind 2007a). Но това полага върху правата едно предзададено и неопределено количество от съставни елементи, което, разбира се, веднага предпоставя като основен съставящ елемент на правата – точката. Познатата аксиоматика, която свързва определена точка и правата, е, че са достатъчни две точки, за да определим една права линия. Но тя трябва да е вече готова в своята цялост, за да премине през тях. Това общо поставяне на неопределена безкрайност се счита за достатъчно, за да обоснове непрекъснатата природа на правата. Но ако навлезем към самото тяло на правата линия, ние трябва да започнем да отличаваме отделните ѝ съставки и да определим начина на тяхното организиране. Ще възникне и въпросът, а кои са пределите на правата линия: къде тя „изчезва“, къде губи непрекъснатостта си. Този вътрешен предел трябва да е отправна точка за дълбоката ѝ геометрия. Все едно сме взели на „зуум“ собственото ѝ конфигуриране и ще открием къде свършва нейното тяло-измерение и, обратното, кое гарантира, че правата ще продължи непрекъснато, без празнини (gaps), както я дава Дедекинд, и ще се съхрани живият „поток“, ход, „протичане“, тъкмо в собствената ѝ вътрешна организация. А ходът на правата обхваща всички нейни точки, както видяхме в дефиницията за непрекъснатостта на Дедекинд. Както и за да е непрекъсната, не трябва да има празнини. Но нека кажем веднага, това означава, че до всяка една точка на правата трябва непосредствено да бъде попълнена друга, която е следващата и така без никакъв пропуск. Ето тази дълбока, отблизо „хваната“ геометрия на правата линия истински задължава нейната непрекъснатост да тече и да конструира цялото ѝ тяло.

Нека най-напред да погледнем към традиционното дефиниране на правата още от Евклид и да видим произхода на елементите, които той ѝ постановява. Още в Права книга в първите дефиниции Евклид полага като основен елемент точката (видяхме, че това се отразява и в дефиницията на числото): „Точката е онова, което няма части“ (1 дефиниция) (Euclid 2008: 6). Тази дефиниция сякаш отнема количеството, абстрахира го от този начален елемент и го полага като нещо неделимо и просто. Но с това наистина точката е нещо само без количественост, макар и да е най-простият елемент за образуване на количеството и на разстоянието и измерването. Защото точката е по Евклид основен определител на правата линия (2 дефиниция): „И линия е дължина без ширина“, а „Екстремумите (extremities) на една линия са точки“ (3 дефиниция) (Euclid 2008: 6). Тук преводът на περατα е ексремум, граница, но и край, предел, в мн.ч. краища, предели. Ако разчленим линията по Евклид, трябва да получим точките. Макар отново онова обтягане на продължението между тях да е самата „дължина“, разстоянието. Защото вече правата линия се дефинира като такова разстояние. Тя е вид линия, която „лежи с равномерни точки по себе си“ (Euclid 2008: 6). Тази равномерност според Евклид гарантира правата линия, което ѝ дава топология в пространството, за да не се получи крива линия. Тук определено дефиницията на правата като най-малкото разстояние между две точки е по-съществената характеристика и черта на една линия да е права (от значение в топологията ѝ е и ъгълът, който сключва нейната протяжност спрямо възможното отклонение като крива). Възможността на правата да тече безкрайно през пространството се дефинира от първите положения на Евклид и това е обяснимо, тъй като той основно използва определени фигури и особено разстоянията (особено при изобразяването на числото в Книга седма – като отсечки с мяра една спрямо друга, вж. Euclid 2008: 194-195). Безкрайността на правата линия е постулирана от последната му 23 дефиниция, прословутата дефиниция за двете успоредни прави, които нямат обща точка в „своето безкрайно продължение“ (Euclid 2008: 6). Евклидовото пространство от *Елементи* все още не борави с безкрайността, включително и в полагането на базовите фигури – равнината и тялото, те са приведени към конкретни и крайно построими фигури и отношения.

Но как се обосновава самият базисен елемент, въведен от Евклид – точката. Онова, което е неделимо (атомон), привлича вниманието на други древногръцки философи, особено в изключителния му статут на граница, но и на елемент, който формира количеството, също така формира особената природа на пространството и времето. Зенон Елейски, известен със своите апории, една от които приведохме, изследва парадоксалната природа на величината, на количеството въобще, въведено спрямо „съществуващите неща“, като полага сред нещата, които са извън тези съществуващи неща, специални количествени реалии, които могат да се изменят количествено: „от останалите неща някои, а именно повърхността и линията ще се увеличават, ако им се прибави по един начин, или пък никак няма да се увеличават, ако им се прибави по друг начин“, както го предава Аристотел (Аристотел 1994: 134). Но основно тук е дефинирането на точката: „точката и единицата обаче не могат да се увеличават по никакъв начин“ (Аристотел 1994: 135). Точката като предел е на предела на количеството и реално е така сама по себе си без-количествена. Даже, Зенон построява своето доказателство на парадоксалността на количеството като „множество единици“, твърдейки, че „същото въобще няма единици“ (Антична философия. Антология 1994: 135). На единицата противостои цялото „възможно“ количество, взето тъкмо в своята възможност: като не-количествено. Затова според Зенон срещу единицата в количеството трябва да застане цялото пълно, завършено множество от единици, всички единици: „необходимо е съществуването на много единици, от които е съставено множеството“ (Антична философия. Антология 1994: 135). С поставянето, формирането на единицата от неопределената основа на общата количественост следва проектирането на цялото множество единици, като една завършена тоталност. В това се състои парадокса на количеството, според Зенон, като съставено от „ограничено и безгранично“ (Антична философия. Антология 1994: 135). Това означава, че и самата единица, точката в геометричен план се нуждае от собствен механизъм на възникване, на производство. А от полагането на точката трябва да следват модификациите на всичките единици, организирани в структурите и хода на цялата обща количественост, и също така пространственост и измерност. Природата на количеството винаги с необходимост изисква и полага „всички единици“ като свой предел и максимум.

Единицата трябва да произлиза от и срещу общата неопределеност, „краят“ на единицата е тази не-количествена обща неопределеност, която именно тя със своето полагане активизира и определя, издигайки я до множественост, а така и залагайки принципа на определеното количество, включително до неговия абсолютен обхват. Така се обхващат елементите и целият порядък на количественото, на неговите начални елементи и пълен потенциал за разгръщане.

Ще използваме тази парадоксална природа на точката и на цялата количественост, основана върху нея, за да разгледаме една начална възможност на правата линия. Това ще е демонстрация на непрекъснатостта на правата линия в дълбоката ѝ геометрия като конституция на нейните точки. Дефинираме точката по Евклид като неделима и екстремум на правата, но и по Зенон: като онова, което няма количественост и не може да се променя, каквото и количество да присъединим към него. Доказателството е в своя първи, най-общо оформен вариант.

Нека върху правата L да вземем две точки a и b. По Дедекинд те могат да имат следните отношения (Dedekind 2007a: 3):

1. $a < b$

2. $a > b$

2. $a = b$.

Разглеждаме случая, в който не е възможно нито 1., нито 2. Тогава ще приемем, че $a = b$.

Тъй като a и b са дефинирани като точки, и по Зенон, това е случаят, в който каквото и да прибавим към a, тя не се променя, остава равна на b.

Ако вземем следващата точка a_1, спрямо добавянето ѝ към разстоянието извън a и b, ще е също равна на b. Или $a + a_1$ остава равно на b, като количество на a и b.

Можем да прибавяме и a_1, a_2, те отново върху L не изменят $a = b$.

Тогава $a + (a_1, \dots a_n)$ също е равно на b, или ще имаме $a + [\infty]= b$.

Цялата безкрайности между a и b не променя тяхното равенство, не ги изменя, безкрайността между a и b е изчерпана, също така може да я абстрахираме от тяхното отнасяне една към друга. Ако a беше една точка, то тя остава срещу цялата безкрайност, определена, спрегната към нея, т.е. срещу всички други точки по L и срещу всяка една точка от L. Но по условие точка a е различна от точка b, тогава a и b са една спрямо друга срещу цялата безкрайност от останали точки. Точките a и b се оказват в чиста позиция спрямо цялото неопределено количество от останалите точки върху L. Тогава a и b трябва с необходимост да са една до друга, без каквато и да е друга точка между тях, всички останали точки извън a и b влизат в отделното, изолирано безкрайно количество от тези останали точки от цялата конституция на L. Имаме a непосредствено до b и срещу $+ \infty$ и $- \infty$, по възможните посоки на L. Не остава възможност за каквато и да е друга точка да взаимодейства с a и b и непосредствено „между“ тях. Основанието на това е и отрицателно: a отрича всяка друга единица, т.е. цялата безкрайност, от която полагаме само една единствена точка b, което също спряга и измества, отстранява цялата безкрайност. Но спрямо а. С това необходимо те са една спрямо друга единствените точки. Следователно те са непосредствено една до друга в отнасянето си по правата L. Според парадоксалния принцип на Парменид за битието: „то не се нуждае от нищо друго, защото иначе би се нуждаело от всичко“ (Антология 1994: 134).

Ако отстраним в това отношение на а спрямо цялата безкрайност от точки на L точката b, правата не може да протече и ще имаме празнина в нейната непрекъснатост. Това е четвърти парадоксален случай, спрямо трите възможни, в които а и b са непосредствено дадени върху цялата спрегната безкрайност от точки върху правата L. Така всяка една такава конфигурация от две точки е база за произвеждане на цялата права линия L.

Двете така конструирани точки точка а и точка b не са просто двете точки, които да демонстрират една права, макар така да остават в това фундаментално отношение, което гарантира непрекъснатата природа в тялото на правата. Те се демонстрират като конституент на правата – всяка следваща точка трябва да се подчинява на техните зададени параметри за тялото на правата. Всека следваща точка, а и всяка една точка от правата дефинира и се дефинира върху цялата безкрайност от всички точки на правата. Те двете организират и подвеждат хода на правата една до друга, разделяйки я в течение-ход в две посоки, които насищат безкрайно следващите точки. Получаваме конституиращата фигура-елемент на правата L: двете точки една до друга, от които се простира ходът на правата до безкрайност: ∞[a:b]∞. Един тотален и първо конституиращ срез на цялата права линия L. Като две непосредствени граници, екстремуми на класа: (∞, а)(b, ∞). Дедекиндовият срез се реализира в два класа, този път дефиниран от непосредствени точки, една до друга, стоящи две точки а и b, без никоя друга точка от L (и от целия континуум) помежду им. С необходимост а и b обаче са безкрайно ориентирани точки, а това демонстрира положението на Дедекинд, че ирационалните числа са определени числа, извън рационалните, които изцяло и напълно насищат правата L:

а + цялата ∞ преди а;

b + цялата ∞ след b;

∞ а и b ∞ изпълват цялата права L, без нищо друго останало.

Следователно, а е непосредствено до b върху цялата права L и в отношение спрямо всички останали точки на L. Между тях на остава нищо друго, като точка от L, но те са върху правата и нейното непрекъснато тяло. Точките а и b разделят цялата права на точно два класа. С необходимост точка а е непосредствено до точка b.

Начална аксиоматика на правата

Това са изходните положения, които ще позволят правата да бъде конституирана като линеарен континуум. На първо място правата L, както я означава Дедекинд, представлява „безкрайно множество от точки“. С това тя е положена като безкрайна формация от елементи, която да „формира непрекъсната линия“ (Jourdain 1915: 34), която касае, както Ф. Джордан въвежда теорията на „множеството от точки“ в един непрекъснат интервал и неговата наситеност с точки, като „навсякъде наситен (everywhere dense)“, а оттук и въпросът за „разпределението на сингуларностите“ (Jourdain 1915: 33-34). Но не всяка съвкупност от точки се „подрежда“ като права линия, както още Евклид задава нейното структуриране. Безкрайността от точки на правата L дават нейното общо количество. Ако ги разгледаме като едно безкрайно числово множество, това ще е неговата мощност и тя без съмнение е безкрайна. Безкрайността, както вече посочихме, гарантира „продължаването“ на правата в пространството, по Евклид.

В стоежа на правата има необходима секвенция от тези точки, както Хилберт я дефинира: правата е „последователността“ на тези точки“ (Hilbert 1950: 17). С това тя притежава собствена структура, осигуряваща това „продължение“ на правата в континуума. Секвенцията от точки прави правата да „тече“. Следователно, в съставянето на цялата права линия трябва да присъства елемент, който осигурява тази специална „верига от точки“. А това ще даде и „посока“ на правата, както я определя спрямо избраните точки Дедекинд, и още движение, и процесуалност. А това определя и нейното базово число като процесуално и безкрайно.

Правата трябва да бъде съставена чрез точките като „средство“ и това е според Хилберт нейната базова „геометрия“ (Hilbert 1950: 80) и съставянето ѝ ще е „асемблиране на точки“ (Hilbert 1950: 83). Но към това асемблиране трябва също да се поставят граничните условия, за да имаме развита конструкция от точки. И тази основна конструкция надхвърля само точките като съставни елементи, а изисква елементи, които организират и гарантират хода ѝ през континуума. Това са и нейните ограничения, ето защо само отчетливите и прекъснати единици са други точки-индивиди, представени с множествата N – на естествените числа и Q – на рационалните числа. Тази редовост и на ирационалните числа също съответства на конституцията и хода на правата. Ето как и специфичните ѝ точки-индивиди в нейния ход изискват ирационални числа, като процесуални и частично безкрайни числа. Частично, тъй като имат своя цяла част винаги съобразно някакво крайно число.

Към така обоснованата и необходима полагаща се конструкция от точки, съставящи правата, трябва да се предяви изискването за непрекъснатост и следване. А това означава, че точките, съставящи тялото на правата, трябва да се следват непосредствено една след друга. Тези техни позиции трябва да се осигурят от конкретното тяло на правата. Както и от непосредствения начин на запълване и свързване на тези точки. Тази конструкция предявява изисквания и към общото измерение, по което се разгъва правата в своето протичане, което трябва да е съизмеримо с трите измерения. Както ще видим след малко, Д. Хилберт точно дефинира това отношение между геометричните измерения, тъкмо спрямо организацията на точките като съставни елементи.

Следването на точките по правата и за да я изпълнят, предполага и оформянето на най-малкото възможно свързване на точките, което е основен елемент за съставянето на правата линия. Такова обособяване и свързване на точки върху правата се дефинира от Хилберт като „*сегмент*“: „системата от две точки A и B, лежащи върху правата“ (Hilbert 1950: 4). Тогава трябва да се определи най-малкият конструктивен сегмент в съставянето на правата линия.

Към този сегмент, дефиниран като „разстояние“, трябва да се постулира ориентацията на секвенцията от точки спрямо континуума в една обща координация, т.е. кое гарантира, че образуваната линия ще е „права“. Което изисква общ „изглед“ върху правата. Това ще изисква включването на правата във взаимодействие с други прави линии (което обаче е извън правата, в равнината), които, пресичайки я, не трябва повече да се пресичат с нея където и да е в пространството. Коректив е и формирането на едно по-голямо разстояние, като сегмент за коригиране и отчитане: което да свързва тези точки с най-късото възможно разстояние, това обаче отново изисква отношение на правата спрямо други точки и прави вече в равнината. Защото кривата линия също ще бъде съставена от точки, но нейната директория се „огъва“ по обиколката на произволна окръжност, а точките ѝ лежат на радиуса на тази окръжност. Или можем да приемем, че базовата, първична подредба на точки като първи точков континуум е винаги в тази чиста точка до точна позиция, която е правата линия, тъй като все още няма околна равнина и съответно елементи и фигури, излизащи извън първичната права. Именно като едно нулево измерение на самата права линия, което я проектира непосредствено и което, обратно, се изразява само по един единствен начин, като прост ход и следване на първичното полагане на правата линия. Тъй като за да се удостовери и образува ъгълът при Евклид, са необходими вече две прави. Затова лесно впоследствие, след образуването ѝ ще отчетем дали линията е права, или крива – като тя остава права, ако през две нейни произволни точки прокараме успоредни по условие прави и установим дали те се пресичат в равнината. Ако е права, тези прави, като сключили всяка същия непроменен ъгъл с дадената права, не трябва да имат обща точка. Ако ъглите останат същите, но двете прави имат обща точка, това означава, че формацията не е права линия, а е крива. Това означава, че самата ориентация на формацията в общия континуум също е част от геометрията на фигурите.

Но ако се поддържа това равномерно закривяване на съставянето на правата, ще получим идеалната завършена линия – т.е. кръгът. Затова очевидно посоката определя линията, посоката: проектирана спрямо континуума. Така ако правата се проектира спрямо една и само една имагинерна друга точка в безкрайността и всяка точка от правата се определя чрез себе си и спрямо тази имагинерна точка – ще имаме и права линия. Т.е. тук проектираме цялата права още отнапред и спрямо нейното *цялостно* протичане в континуума. Ако имагинерната точка на проектиране се сменя спрямо следващата точка или спрямо някакъв група от последователни точки, т.е. сегмент, ще имаме не-права линия. Ако тези точки са последователни и равномерно водени от еднакво отстояща точка: като хорда на една окръжност, или като нейни радиуси, ще имаме идеална крива до нейното затваряне. Ако има различни сегменти, водени така спрямо различни точки, с отношение към евентуална друга точка, която е център на окръжност, после следваща и т.н., ще имаме произволна крива.

Елементи на правата линия
/като първата чиста непрекъсната фигура/

Елементите на правата линия извеждат нейния градеж спрямо същинското ѝ начеване и разгъване в общия геометричен континуум. Затова те не полагат точки единствено като съставка правата, а разглобяват правата до дълбока геометрия, с която да се даде нейната вътрешна структура – секвенционалната организация в геометричния континуум. И така като права линия, дефинирайки така *първичната* права линия.

Начална континуалност. Това е цялото начално общо състояние и „вместимост“ на континуума, който е условието за съставяне и течение на правата. В чистия му начален статус това е чиста без-прекъсваемост, противоположното на точката. С което ще се въведе самото прекъсване. Но не точката създава непрекъснатата природа и ход на правата, на линията въобще, а тъкмо възможността за структура и протичане. То е онова, което е отвъд и преди точката и разполага с огромни възможности за граница, релации и запълвания. Кант го нарича „съвкупността на всяка възможност“ (Кант 2013: 496), която предоставя материала и подразделението за „пълното определяне“ на всяко нещо, „защото всички отрицания са само ограничения на една по-голяма и накрай на най-висшата реалност, следователно те предпоставят тази последната и по съдържание са само производни на нея“ (Кант 2013: 499).

Директория на правата. Това е чистата континуална структура на правата и основа на нейната организация. Директорията има посока и е така векторно ориентирана, но без елементи, като начална точка и разстояние (които лесно могат впоследствие да се нанесат върху нея). Директорията се състои от места за точки – point-holders. Тези места текат непосредствено едно до друго в посоката (в двете възможни страни) на правата. Основна съставка на директорията е и тялото на правата. То се проектира срещу удържането на още една имагинерна точка, спрямо която се подреждат точковите места. Ако имаме една и само една имагинерна точка за всички места и тяхното подреждане, ще имаме права линия. Ако директорията има и други имагинерни точки, ще имаме не-права линия, с възможностите на идеалната крива – до кръг, или със само една друга точка, която определя равна отстъпка в закривяването и е център на този кръг, на кривата линия – с множество такива точки на закривяване. Разбира се, може и да има други имагинерни точки, като общо проектиране на правата, с които да имаме начупена права линия. Единствената имагинерна точка на правата линия е в отношение с всяко едно точково място и така впоследствие с всяка една точка от правата линия.

Едно място граничи с друго място по директорията, така че те все пак имат граница, която няма свое определено „разстояние“, отделящо две места. Впоследствие това ще е и границата, която отделя две точки върху правата. Но и ги сближава *непосредствено*. Такива отстояния са проблем при разпределението на сингуларностите, тъй като поставят прекъсването от „точка до точка“ (Jourdain 1915: 35), които Кантор разглежда в построяването на редица от сукцесивни интервали върху линията, между точките в континуума, или като „безкрайно малки“ разстояния, които могат да се пренебрегнат като „непрекъснати кръгови арки, съставени от другите точки“ (Jourdain 1915: 35-37). Можем и да приемем това отстояние като абсолютна нулева димензия, като абсолютната нула и като чисто отмятане, а така и като „прекъсване“ до единствената точка, която ще го запълни. С това обаче трябва да признаем собствено място и специална протяжност на точката.

Точка на правата. Ще дефинираме точката като абсолютно най-малката (завършена) протяжност в геометричния континуум. Нейната протяжност се равнява единствено на себе си и на нищо друго и не се съставя от нищо друго, поне засега в геометрично отношение. С това точката е най-малката запълнена „част“ от геометричния континуум. Ако я вземем абсолютно, то срещу нея ще отстои целият континуум, в цялата му мощност и геометрична изпълнимост и организация. Тъкмо така тя може да се дефинира и в теорията на числата. Но тогава под едно число ще имаме структура от точката и начина на приемане и отнасяне с други точки в континуума. Едно число ще е съставено от точки и празни места за точки със съответната организация на попълване на континуума. Всяка една организация в континуума може да бъде разгледана чисто, откъм съставящите я точки.

Точката е сама по себе си протяжна, и тя не може да формира сама разстояние. Затова трябва поне още една точка. Това отнасяне на две точки вече основава една дистанция и елемент на изпълване на непрекъсната геометрична структура.

Начален сегмент на правата. Това не е всеки сегмент, който може да бъде образуван от всеки две и повече точки на правата, както го дефинира Д. Хилберт, а е конституиращият елемент и принцип на непрекъснатата фигура. Необходим е най-малкият възможен сегмент, освен точката, взета като начална точка при Хилберт: за т. О – ОО е сегмент на точката „сама по себе си“ (Hilbert 1950: 51). Най-малкият възможен сегмент е съставен от две точки, които лежат на директорията на правата непосредствено една до друга. Те са запълнили две непосредствено едно до друго места за точки върху директорията на правата. Нямат никаква трета точка помежду си.

Всеки следващи две точки върху правата трябва да влязат в това отношение една спрямо друга на начален сегмент.

Тяло на правата. Това е непрекъснато запълнената директория на правата. Върху директорията на правата няма свободни места за точки. Множеството от точки върху правата е безкрайно. То е организирано по дълбокия строеж на правата и тече с посоката на правата през целия геометричен континуум. Всички точки на правата се подчиняват на реда и хода на нейната конституция.

Всичко така поставено дотук определя и статута на правата като базово измерение на континуитета и запълването на геометричния континуум. Можем да изведем общото условие, че всяка една съвкупност от точки в континуума трябва да има своя организация, ред и протичане, като така тя е непрекъснато организиран домейн. И също така трябва да има своя строеж и определено отношение спрямо целия континуум, за да има статут на базова геометрия, с термина на Д. Хилберт. Както и да предлага основа и преход за следващи (базови) организации на целия континуум.

Ориентация на правата. Това е общото ѝ положение, т.е. топология и участие в следващи геометрии. Най-вече, разбира се, това е завършеността на цялата конструкция на правата спрямо следващото базово измерение на равнината и възможността за участие в това и в други геометрии. Със своето отношение към следващите измерения и към другите геометрии правата демонстрира статута си на базово геометрично измерение.

Конституиране на правата линия

Конституирането на правата линия се осъществява по набор от аксиоми на базовия тип геометрия, развити от Д. Хилберт в неговия труд „Основи на геометрията". С това правата линия демонстрира статута си на базова геометрична формация.

I. Аксиома на началната геометрия

Производството на правата линия се основава на най-малкия ѝ градивен сегмент – две точки, т. O_1 и т. O_2, O_1O_2, които са непосредствено лежащи една до друга. Между тях няма друга точка върху директорията на правата.

С тази аксиома се определя, както постулира Д. Хилберт, геометрията на правата линия. Третата точка, поставена извън O_1 и O_2, двете точки, образуващи началния сегмент на правата, и не заела място в директорията, е вече в равнината: „I, 3 Три точки A, B, C не ситуирани върху една права линия напълно определят една равнина α" (Hilbert 1950: 2). С това с така положената точка е въведена „нова геометрия" (Hilbert 1950: 15). Това е геометрията на равнината, на следващото геометрично измерение след правата като първата непрекъсната формация в геометричния континуум.

Съответно въвеждането на една четвърта точка, отново лежаща извън формацията на равнината, въвежда следващата „нова геометрия" на пространството: „I, 7… в пространството съществуват най-малко четири точки, нележащи в една равнина" (Hilbert 1950: 3).

В тази проекция спрямо началните точки на правата линия, равнината, пространството се виждат възможностите за тяхното взаимното координиране и преход, както и възможностите за тяхната дълбока геометрия.

II. Аксиома на връзката (Hilbert 1950: 5)

Третата точка, т. O_3, спрямо един начален сегмент O_1O_2, с необходимост формира връзка с O_1O_2 по хода на директорията. O_3 ще се свърже непосредствено или ще образува начален сегмент спрямо т. O_1 или т. O_2 в две единствено възможни посоки на директорията на правата. Ще имаме O_3O_1 в начален сегмент или O_2O_3 в начален сегмент.

Всяка следваща запълнена точка по правата ще се свърже единствено по този начин с предходните. Като образува начален сегмент само с една единствена точка (в една от двете възможни посоки по правата).

Всяка точка от правата L влиза в начален сегмент, като двойка точки, непосредствено лежащи на правата една до друга.

По правата не може да се намери точка, свободна от влизането си в такъв начален сегмент.

III. Аксиома на реда (Hilbert 1950: 3-5)

Началните сегменти на правата образуват секвенция, чрез повторение на формираните по такъв начин сегменти, или начални двойки точки.

Всяка точка образува такава начална двойка с предходната точка (също влизаща в такъв начален сегмент) и участва в непосредствено следваща двойка с друга точка. Така правата нараства строго в две посоки, дадени спрямо един първичен сегмент.

Правата е така подредена структура от двойки точки, от начален сегмент по цялата своя дължина, по цялата си директория.

Това повторение е до безкрайност, на безкрайно количество от точки.

Може да дефинираме дължината на правата в цялата поредица от начални сегменти на нейната директория.

Оттук можем да организираме всякакви сегменти върху правата. Може и да я насочим в хода на сегменти спрямо една абсолютна начална точка, вече като безкраен вектор с определена посока по директорията на първичната права.

IV. Аксиома на непрекъснатостта (Hilbert 1950: 15)

Това е самото образуване и ход на тялото на правата.

1. По тялото направата не може да има свободно място, т.е. незаето от точка, по цялата ѝ директория.

2. Всяка точка от правата участва в начален сегмент спрямо предходната ѝ точка и спрямо непосредствено следващата. Няма точка, която да е само на една от тези позиции в двойката на началния си сегмент.

Това означава, че по отношение на правата, по нейното тяло, няма реално последна или начална точка.

Всяка точка на правата е свързана в начален сегмент и така пренася свързването и реда направата по директорията ѝ.

V. Аксиома на завършеността (Hilbert 1950: 15)

1. Никъде по правата не се нарушава нейната директория. Това означава, че няма точка от правата, която да е в друго измерно отношение спрямо правата. Затова и „няма възможност за нова геометрия" (Hilbert 1950: 15).

2. Цялото на правата и нейното конституиране формират базово геометрично измерение. Те позволяват и сегментиране и мапиране по правата с основни геометрични и числови параметри.

Правата се завършва по отношение на следващото геометрично измерение, непосредствено следващо след нея, за което тя е основата и предоставя градивен материал и основни релации.

3. Всяка точка се отнася количествено и геометрично към цялото на правата.

4. Цялото на правата, конституирано по нейната дълбока геометрия, има своя *количествена определеност* в континуума, следователно своя мощност, относима към мощността на континуума.

Всички аксиоми I – V демонстрират производството на правата като първата непосредствена формация в континуума и като базово негово измерение. Правата е първата геометрична фигура, безкрайно свързана в своите градивни елементи, безкрайно конгруентна в тяхното повторение и чиста секвенция, в своята цялост правата дава базово измерение на геометричния континуум и следователно съставя тип мощност в основния спектър от мощности на целокупния континуум.

Изводи и проекции от IV част:

I. Извеждането на производството на правата линия като нейна дълбока геометрия я полага в мащаба на геометричния континуум. Това определя нови елементи в нейната структура и ход, които я демонстрират като базова геометрия. Демонстрират я и като непрекъснат домейн.

II. Конструирането на правата линия отговаря на въпроса как възниква една нова геометрия. Който отваря още въпроси – за възникването и демонстрирането на възможните базови геометрии. Те се простират единствено върху възможността и основния спектър на целокупния геометричен континуум. Началните елементи и конституция на правата отварят възможността за пространството и следващите базови геометрии в континуума.

III. Открива се връзка и съответствие между числовите мощности на континуума и геометричното им проектиране, демонстрирано чрез първия непрекъснат домейн, каквато е правата линия. Съответно новите геометрии обещават да предоставят нови непрекъснати домейни и за числата, т.е. съществуването на „нов инструмент“, като „нови числа“, както постулира Р. Дедекинд. Тези нови числа с необходимост трябва да оперират с *мощностите* в цялото на континуума. А те се дефинират именно като безкрайни, но и като количествено определени, и като свързани и оформящи се в съответното си продуциране, степен и организация към мощността на самия Абсолютен континуум.

С всичко това задаваме същинския мащаб и дефиниране на безкрайността, както я проектира Рихард Дедекинд и я извежда Георг Кантор, това не е единицата като основаващ елемент, и оттук мярата на крайното количество. Мярата на безкрайността е определена в обхвата на континуума и в базовите непрекъснати домейни, които го основават и разгръщат и които могат да бъдат организирани и определени по мощност, структура и редове в него като Абсолютен континуум на величините и измеренията.

References

Aristotle, 1994. Metafizika. // Antichna filosofiya. Antologiya. Sast. R. Radev. St. Zagora: Ideya, 134-135. [Аристотел, 1994. Метафизика. // Антична философия. Антология. Съст. Р. Радев. Ст. Загора: Идея, 134-135.]

Bronstein, M. M., Bruna, J., Cohen, T., Velickovic, P. 4 may 2021. Geometric Deep Learning. Grids, Groups, Graphs, Geodesics, and Gauges. arXiv:2104.13478v2 [cs.LG] 2 May 2021

Cantor, G. 1915. *Contributions to the Theory of Transfinite Numbers*. New York.

Dedekind, R. 2007a. *Continuity and Irrational Numbers*. // Dedekind, Essays on the Theory of Numbers. [Ebook #21016, Project Gutenberg License], pp.1-13.

Dedekind, R. 2007б. *The Nature and meaning of Numbers*. // Dedekind, Essays on the Theory of Numbers. [Ebook #21016, Project Gutenberg License], pp.14-58.

Ehrlich, Ph. 2012. The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of All Numbers Great and Small. // The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 18, Number 1, pp.1-45.

Euclid, 2008. Euclid’s Elements of Geometry. Translation by R. Fitzpatrick. ISBN 978-0-6151-7984-1

Hilbert, D. 1950. The Foundation of Geometry. Translation by R. Fitzpatrick.

Jourdain, Ph. *Introduction*. 1915. // Cantor, Contributions to the Theory of Transfinite Numbers. New York, pp. 2-82.

Kant, I. 2013. Kritika na chistiya razum. Sofiya: Akad. izd. „Prof. M. Drinov“. [Кант, И. 2013. Критика на чистия разум. София: Акад. изд. „Проф. М. Дринов“.]

Kristeva, S. 2018. Genezis i pole na logicheskata teoriya. Studii po filosofska logika. [Кръстева, С. 2018. Генезис и поле на логическата теория. Студии по философска логика. Вл. Търново: Фабер.]

Parmenides, 1994. Za prirodata. // Antichna filosofiya. Antologiya. Sast. R. Radev. St. Zagora: Ideya, 131-134. [Парменид, 1994. За природата. // Антична философия. Антология. Съст. Р. Радев. Ст. Загора: Идея, 131-134.]