Ерлангенската програма на Феликс Клайн – методологически генезис и перспективи

Иво Иванов Минков

Югозападен университет „Неофит Рилски“ – Благоевград

iminkov@swu.bg

Felix Klein's Erlangen Program – Methodological Genesis and Perspectives

Ivo Ivanov Minkov

South-West University "Neofit Rilski" – Blagoevgrad

iminkov@swu.bg

Резюме: Ерлангенската програма на Феликс Клайн се осмисля и представя от някои изследователи в областта на историята и философията на математиката като много значим фактор, със статут, бих казал на „Коперникански обрат“ в геометрията. Настоящата разработка търси метафизическата и метаматематическата позиция, т.е. философско-математическото топологизиране на Програмата на немския математик в логическата схема на целокупната геометрия. Акцент се поставя върху работите на Еварист Галоа и тяхното методологическо влияние при операционализирането на теоретико-груповия подход от Клайн, в областта на геометрията. Всичко това се постига и обобщава през концептуален анализ на методологическите насоки у Клайн, свързани с изследванията на многообразията на произволен брой измерения и абстрахиране от геометричната фигура, което той развива като необходимост за появата на по-сложните геометрии с друг тип инварианти. Така Ерлангенската програма имплицитно съдържа, но и експлицитно излага, своята ръководна идея – единството на понятие и реалност.

Ключови думи: Феликс Клайн, Ерлангенска програма, история на математиката, философия на математиката.

Abstract: Felix Klein's Erlangen program is conceived and presented by some researchers in the field of history and philosophy of mathematics as a very important factor, with status, I would say the "Copernican turn" in geometry. The present study seeks the metaphysical and meta-mathematical position, i.e. the philosophical-mathematical topology of the German's Mathematician's Program in the logical scheme of the whole geometry. Emphasis is placed on the works of Evarist Galoa and their methodological influence in the operationalization of the theoretical-group approach by Klein, in the field of geometry. All this is achieved and summarized through a conceptual analysis of Klein's methodological guidelines related to the study of the diversity of any number of dimensions and abstraction from the geometric figure, which he developed as necessary for the emergence of more complex geometries with other types of invariants. Thus, the Erlangen program implicitly contains, but also explicitly states its guiding idea – the unity of concept and reality.

Keywords: Felix Klein, Erlangen program, history of mathematics, philosophy of mathematics.

В историята на математиката деветнадесети век се отличава от останалите епохи със съществени евристики, значими трансформации и преобразувания, с нови открития и доразвиване на предходното знание. Постига се значителен напредък в много направления на математическата наука, като математическа логика, алгебра, теория на числата и теория на вероятностите, геометрия, диференциално и интегрално смятане, изчислителна математика, приложна математика, развиват се методите на математическата физика, историографията и развитието на математическото образование и др.

В това бурно столетие живее и твори немският математик Феликс Клайн (1849-1925). Неговата научна дейност представлява интерес както за математическото познание, така и за философското и философско-математическото познание. Преди всичко той се причислява към класиците на математическата наука, а самите класически съчинения на математиката, които засягат фундаментални проблеми за основанията на тази наука, са обсъждани задълбочено освен от математици, разбира се, от философи. Теоретичното знание представлява интерес тъкмо за такива учени и възгледите на Клайн не само обобщават и синтезират огромна част от предходното математическо знание, но и прокарват пътя за по-нататъшни изследвания и методологически перспективи.

Деветнадесети век развива допълнително приложната математика, но от друга страна, по думите на самия Клайн: „мощно развива и чистата математика в две посоки; първо, създават се съвършено нови области като теорията на функциите на комплексна променлива и проективната геометрия; второ, подлагат се на същностен критически анализ научните постижения на предходните епохи“ (Клейн 1937: 31).

През октомври 1872 г. Клайн представя пред Философския факултет на Ерлангенския университет лекция със заглавие *Vergleichende Betrachtungen über neuere* *geometrische Forschungen* [1], по известна с наименованието *Erlanger Programm*. Чрез нея той осъществява поврат в геометрията, като класифицира различните геометрии според групите от преобразования, при които остават (запазват се) валидни техните предложения. Преходът от една към друга геометрия се разглежда през „тъждественият на себе си и същевременно развиващ се, изменящ се субстрат – инварианта на преобразованието" (Кузнецов 1980: 16).

Ерлангенската програма (по-нататък Е. П.) на Клайн се осмисля и представя от някои изследователи в областта на историята и философията на математиката като много значим фактор, със статут бих казал дори на „Коперникански обрат" в геометрията [2]. Ето защо, настоящата разработка търси метафизическата и метаматематическата (по Хилберт) позиция, т.е. философско-математическото топологизиране на Програмата на немския математик в логическата схема на целокупната геометрия. Това може да се постигне през концептуален анализ на методологическите насоки у Клайн, свързани с изследванията на многообразията на произволен брой измерения и абстрахиране от геометричната фигура, което той развива като необходимост за появата на по-сложните геометрии с друг тип инварианти.

За прокарване идеите на Е. П. Клайн използва методология, базирана върху теоретико-груповия подход в математиката и теорията за инвариантите, която се заражда в средата на XIX век в Англия. Идеята за „група от пространствени трансформации" отвежда Клайн до опит за осъществяване на аксиоматично изграждане на проективната геометрия.

Клайн изхожда от понятието „група" и по-точно от идеята за „група от пространствени-трансформации". Той тръгва от положението, че комбинацията, транзитивността (подредбата, пермутацията) от произволен брой трансформации на пространството винаги е еквивалентна на единична трансформация. И ако сега дадена система от трансформации има свойството, всяка трансформация получена чрез пермутация на всякакви трансформации на системата, която принадлежи към тази система, то тя ще бъде наречена „група от трансформации" (Klein 1892: 217). Като пример за „група от трансформации" Клайн посочва съвкупността от движения, където всяко движение се разглежда като операция, извършена върху цялото пространство. Така немският математик изказва идеята, че съществуват пространствени трансформации, чрез които геометричните свойства на конфигурациите в пространството остават напълно непроменени. По същество геометричните свойства са независими от позицията, която дадена конфигурация заема в пространството, от нейната абсолютна величина и накрая от смисъла, според който са подредени нейните части. Следователно, свойствата на конфигурацията остават непроменени от всевъзможните движения на пространството: 1) чрез трансформация в *подобни* (рефлексия) конфигурации; 2) чрез трансформация в *симетрични* конфигурации по отношение на равнина (отражение); както и 3) чрез всяка *комбинация* (транзитивност, подредба, пермутация) от тези трансформации. Съвкупността от всички тези трансформации Клайн обозначава като „основна (принципна) група“ (*Hauptgruppe*) на пространствените трансформации. Геометричните свойства обаче остават непроменени от трансформациите на основната група. И обратното също е в сила – геометричните свойства се характеризират с оставането им като *инвариант* спрямо трансформациите на основната група.

Принципните постановки на Е. П. на Клайн са свързани, бих казал опосредствани, от един значим момент при дефиницията на „групата на Галоа“ в теорията на уравненията, разработена именно от френския математик Еварист Галоа (1811 – 1832). В своето произведение – *Мемоар за условията за решимост на уравненията с радикали* – Галоа започва с дефиниране на областта на рационалност: „Нещо повече, можем да се условим да разглеждаме като рационалности всички рационални функции на някакъв брой определени количества, които а priori са предположени за известни. Например, можем да изберем някакъв корен от цяло число и да разглеждаме като рационалности всички рационални функции на този корен“ (Галуа 1936: 63). Галоа смята, че можем да изменяме областта на рационалност, като присъединяваме нови количества, в качеството им на известни. Той продължава: „Ще видим нещо повече, че свойствата и трудностите на уравнението могат да бъдат направени съвсем различни в зависимост от количествата, които се присъединяват към него. Например, присъединяване на някое количество може да направи приводимо едно неприводимо уравнение. Така като присъединяваме към уравнението

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0,$$

където n – е просто число, коренът на едно от спомагателните уравнения на Гаус [41], то това уравнение се разлага на множители и става, следователно, приводимо“ (Галуа 1936: 63-64).

За дефиниране на „групата на Галоа“ на уравнението той доказва, първо, лемата за „примитивния елемент“ – винаги (когато няма равни корени) може да се избере такава функция V от корените на неприводимото уравнение, че всички корени да се изразяват като рационални функции на V. След това доказателство има *Забележка*: „Забележително е, че от това допускане може да се заключи: всяко уравнение зависи от такова помощно уравнение, всички корени на което са рационални функции един от друг“ (Галуа 1936: 66). При доказване на една от най-важните леми след това („*Лемма IV*“), Галоа допуска, че е образувано уравнението по отношение на V и е взет един от неговите неприводими множители, така че V е корен на неприводимо уравнение. Нека V, V′, V″... са корените на това неприводимо уравнение. Ако a = f (V) е един от корените на даденото уравнение, то f (V′) също е корен на това уравнение (Галуа 1936: 67).

И наистина, умножавайки всички множители от вида V – φ (a, b, c,…, d), където над буквите ще бъдат извършени всички възможни пермутации, ще имаме рационално уравнение за V, което се оказва по всякакъв начин делимо на разглежданото уравнение; следователно V′ трябва да се получи чрез смяна на буквите във функцията V. Нека

$$F(V, a) = 0,$$

е уравнение, което се получава, ако се пренаредят всички букви с изключение на първата. Тогава ще имаме

$$F(V', b) = 0,$$

където b може да бъде равно на a, но във всеки случай е коренът на даденото уравнение; следователно, както следва от даденото уравнение и от F (V, a) = 0, че a = f (V), то от даденото уравнение и от F (V′, b) = 0, следва че b = F (V′).

Това е основната лема за дефинирането на „групата на Галоа“, а самата дефиниция е представена в следващата *Теорема*:

„Теорема. Нека е дадено уравнение и a, b, c, … са m-те негови корена. Винаги съществува група от пермутации на буквите a, b, c, …, която притежава следните свойства:

1. Всяка функция на корените, която е инвариантна по отношение на субституциите на тази група, е рационално известна (принадлежи на областта на рационалност).
2. Обратно, всяка рационално дефинирана функция на корените е инвариантна по отношение на тези субституции“ (Галуа 1936: 67-68).

Под „пермутация“ Галоа разбира *редица от корените*, а под „субституция“ – *съответствие на множеството на корените в себе си*. Това схващане представлява интерес. Той посочва, че „Групата на пермутациите е множеството от пермутации, за което се казва: „Понеже винаги разглеждам въпроси, в които първоначалното разположение на буквите изобщо не влияе на разглежданите групи, трябва да имаме едни и същи субституции, каквато и да е пермутацията, от която тръгваме. И така, ако в подобна група съществуват субституциите S и T, уверени сме в съществуването на субституцията ST“ (Галуа 1936: 64). „Група на пермутациите“ е представена като множество от пермутации ∪ с допълнително свойство при произволна пермутация u ∈ ∪ множеството G (u, ∪) на всички субституции g, за които g (u) ∈ ∪, да бъде едно и също. Това множество от субституции се нарича „група на субституциите“ (Башмакова, Кузичева 1981: 72-73).

По-нататък, при доказателството на теоремата Галоа разглежда „примитивния елемент“ V и формулите:

$$a = \varphi V,\ b = \varphi_1 V, \ldots\ \varphi_{m-1} V$$

и дефинира групата от пермутации на корените,

$$(\varphi V, \varphi_1 V, \ldots\ \varphi_{m-1} V),$$
$$(\varphi V', \varphi_1 V', \ldots\ \varphi_{m-1} V'),$$
$$(\varphi V'', \varphi_1 V'', \ldots\ \varphi_{m-1} V''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

където V, V′, V″,.... са всички корени на уравнението V. Това е съвсем разбираемо определение на действието на групата на Галоа върху множеството на корените въз основа на нейното действие върху примитивния елемент“ (Башмакова, Кузичева 1981: 73).

Общият извод тук е, че според разбирането на Галоа от значение са субституциите, а не пермутациите. А разкриването на нови по-дълбоки математически закономерности в теорията на уравненията, способства за появата на „теорията на полетата“ и „теорията на групите“. Сам Клайн посочва, че има известна аналогия в подходите на Галоа и неговите разработки, центрирана около „групата трансформации“. Вярно е, че тези трансформации са приложени към различни обекти: при теорията на уравненията – върху краен брой отделни елементи; при геометрията – върху безкраен брой от елементи в непрекъснато многообразие. Друга ценна аналогия в методиките на двамата велики математици е въпросът за „реалния“ обект на изследване. При Галоа това е груповата теория (подход) на теорията на субституциите, откъм която теорията на уравненията произлиза като приложение. По същия начин Клайн постановява една теория на трансформациите, теория на групи получени чрез трансформации на дадени характеристики. Идеите за комутативност, подобие и т.н. намират приложение точно както в теорията на субституциите. Като приложение на теорията на трансформациите се оказва третирането на многообразие, което е резултат от приемането на групата трансформации като основание (Klein 1892: 242).

Въздействието на идеите на Галоа върху Клайн може да се представи по отношение на методологията, защото немският математик подхожда тъкмо методологически, търсейки общото през особеността. Той посочва, че математическата формулировка на законите на природата се основава на използване метода на *интерполацията*. Клайн осмисля този метод като своеобразен вид *интуиция*, насочена от точността и строгостта на единичните елементи към разглеждане на генералните състояния. Трябва да се изследват простите закони, свързващи същностните количества, за разлика от множествата случайни смущения. Това той нарича процес на *идеализация*, посредством *интуиция*. Едва тогава идва ход на логическото изследване.

В своя статия, засягаща аритметизацията на математиката, Клайн все пак посочва, че математическите разработки, произхождащи от интуицията, не трябва да се считат за действителни съставни части на науката (за фундамент), докато не бъдат приведени в строга логическа форма. Обратно, простото абстрактно изложение на логическите отношения също не задоволява, докато не е изложена степента на тяхното приложение (Klein 1896: 247-248).

Галоа изследва задълбочено и древната задача за решаване на уравненията с радикали. В този процес френският математик насочва вниманието от самата задача към методите за нейното решаване, въвеждайки понятието „поле“, групите на уравненията, установява съответствие между „подгрупите“ на тази група и „подполетата“ на полето на разложимост на полинома, а накрая обособява нормалните делители на групата, като разглежда нейния композиционен ред (Башмакова, Кузичева 1981: 49). В Е. П. Клайн споделя, че ако приемем за момент неподвижността на пространството, т. е. то се приема за една твърда многообразност, то тогава всяка фигура би имала индивидуална характеристика и от всички нейни свойства, като индивидуална (фигура), само чисто геометричните такива (свойства) са запазени (съхранени, снети) в трансформациите на основната група. И така формулираната идея бива изяснена от Клайн в по-голяма степен едва по пътя на нейното доказателство и експозиция, т. е. осъществява се опит за експликация на „ставането на същността“ и „ставането на наличното битие“ за отчитане и принципиране на взаимовръзката и динамиката между „двете ставания“. Затова аналогията в методологията на двамата математици се проявява в значителна степен.

Клайн отхвърля конкретното понятие за пространство и го възприема единствено като многообразие от n-измерения, което означава три измерения според обикновената идея за точката като елемент в пространството. По аналогия с трансформациите на пространството Клайн говори за трансформации на многообразието, които също оформят „групи“. Всяка „група“ има своето необходимо място (топос) в теорията за пространството и многообразието и оттук се формулира проблемът: „Дадено е многообразие и група от трансформации на същото; да се разработи теорията за инвариантите, свързани с тази група“ (Klein 1892: 218).

Немският математик определя този проблем като централен, който подразбира не само обикновената геометрия (Евклидова), но също така и по-специално съвременните нему геометрични теории (които той подлага на изследване), и различните методи, посредством които се третират многообразията от n-измерения.

Всички методи, използвани за различните трактовки, са, в крайна сметка, от еднакво значение, стига да задоволяват генералните и общи условия. Затова Клайн преминава към изложение на неизменността на геометричните свойства на конфигурациите, въпреки трансформациите на основната група. Той дава за пример разглеждане на конфигурациите в пространството по отношение на една особена точка, както в сферичната тригонометрия (Klein 1892: 219). Тогава проблемът се заключава в това да се развият свойствата, оставащи неизменни (инвариантни) при трансформациите на принципната група, не заради конфигурациите, взети индивидуално, но заради системата, състояща се от тези индивидуални конфигурации заедно с дадената точка. Или, което е същото: да се изследват конфигурациите в пространството, вземайки предвид тези свойства, които остават непроменени (запазват се) от трансформациите на принципната група.

Значи имаме: 1) „дадено многообразие“, и 2) „група от трансформации“, приложена към него. И нека тогава се изследват конфигурациите, съдържащи се в многообразието по отношение на една определена конфигурация. Тогава, смята Клайн, бихме могли или да добавим определената конфигурация към системата, изследвайки характеристиките (свойствата) на разширената система от гледна точка на дадената група; или бихме могли да оставим системата, без да я разширяваме, като по този начин ограничаваме трансформациите и оставяме определената конфигурация непроменена. Клайн продължава, като посочва, че принципната група може да бъде изместена: „Ако основната група бъде заменена с по-сложна и изчерпателна група, то тогава само част от геометричните свойства остават непроменени. Остатъкът вече не се появява като свойства на конфигурациите на пространството от само себе си, а като свойства на системата, образувана чрез добавяне към тях на някаква конкретна конфигурация. Това последното се дефинира, доколкото изобщо е определена конфигурация, от следното условие: предположението, че е фиксирано, трябва да ни ограничи до онези трансформации на дадена група, които принадлежат към основната група“ (Klein 1892: 220).

В тази *Теорема* Клайн вижда особеността на съвременните и актуални последни методи в геометрията, които се отнасят и към метода на „елементарната геометрия“. Това, което ги характеризира, е, че те основават своите изследвания на „разширена група“ от пространствени трансформации, вместо на „основната група“. Връзката помежду им се определя, когато една от групите включва другата по съответната *Теорема*. Същото е валидно и за различните методи, третиращи многообразията на n-измерения (Klein 1892: 220).

Теорията на групите се свързва с общото развитие на алгебрата и теорията на алгебричните числа през периода 1800 – 1870 г. Деветнадесети век може да се нарече век на качествени преобразования в математическата наука, с все по-ясно очертаваща се алгебраизация (аритметизация) на математиката. Обособяват се нови области на математиката като алгебричната теория на числата, алгебричната геометрия. Освен теорията на групите и безспорното влияние на Галоа, Е. П. е провокирана и от теорията за инвариантите, която изживява своя разцвет в средата на XIX век (1840 – 1870), и по същество е област от алгебрата, която застава между линейната алгебра и алгебричната геометрия: „От една страна, тази теория обобщава и развива такива теми на линейната алгебра като привеждането на квадратичните форми или матриците на линейни трансформации в каноничен вид. От друга, изучава в конкретни ситуации отговора на въпроса: Даден е геометричен обект, описан с алгебрични условия в някаква координатна система. Да се намери начин по алгебричните условия да се определят геометричните характеристики на обекта, които са инвариантни при смяна на координатната система“ (Башмакова, Кузичева 1981: 51). В тази посока Клайн е повлиян от работите на А. Клебш (1833 – 1872).

Артър Кейли (1821 – 1895) е също един от пионерите в областта на теорията за инвариантите. В своя *Шести мемоар за формите* (1859) той показва как могат да се представят метричните свойства на геометричните фигури от единното гледище на теорията за инвариантите: „Това изследване става един от източниците за Ерлангенската програма на Ф. Клайн“ (Башмакова, Кузичева 1981: 51). Класификацията на нееквлидовите геометрии, която Клайн прокарва, е изградена на базата на работата на Кейли върху проективната геометрия (Ewald 1996: 542). Самият Клайн посочва, че Кейли е „създател на днешната алгебрична геометрия както в направлението на инвариантната теория, така и на геометричната теория“ (Клейн 1937: 185).

След Галоа започва системното развитие на теорията на групите, на линейната алгебра. А класическата теория за инвариантите възниква благодарение на три математически науки: теорията на числата (класификацията на бинарните квадратични форми на Гаус), геометрията (проективните свойства на кривите) и алгебрата, в частност теорията на детерминантите. Действително влияние върху Клайн има и от други автори (Плуке, особено Клебш и др.), с някои от които той работи в сътрудничество (Софус Ли), но в методологическо отношение, трудовете на Галоа представляват също голям интерес.

Клайн определено насочва своята работа към приложение на понятието „инвариант“ в геометрията, задълбочавайки се в изучаването на т. нар. „хомогенно многообразие“: структура [M, G] съставена от многообразие M и група G, действаща транзитивно на M. Според някои изследователи това контрастира остро с понятието на

Риман за структура [M;d], състояща се от многообразие, чиято „метрика" d (p, q) се дефинира от диференциал на локално разстояние $ds^2 = \sum g_{ij}\, dx_i dx_j$ (Birkhoff, Bennett 1988: 150-151). Както във фундаменталната монография на К. Жордан (1838 – 1922) – *Трактат за субституциите и алгебричните уравнения,* – която изучава групите от субституции, теорията на Галоа и нейното приложение в уравненията е обяснено как понятието „група от субституции", правилно приложено, детерминира кои полиномни уравнения могат да бъдат решени посредством радикали, така и Клайн показва по подобен начин как понятието „непрекъсната група от трансформации" дава обективното основание за типологизиране на геометричните теории и теореми.

В своята научна работа Клайн се устремява и към конституирането валидността на неевклидовите геометрии. Последните той моделира като проективна геометрия в определено съотношение с Евклидовата геометрия. Според големия математик геометрията е теория (наука), която изучава свойствата на фигурите, запазени и съхранени, независимо от трансформациите на дадена група. Различна група от трансформации води до различна геометрия. Ето защо анализът на група от движения води до Евклидовата геометрия. Когато тези движения бъдат заместени от афинни, или проективни трансформации, резултатът е афинна и проективна геометрия. По този начин Ерлангенската програма на Клайн доказва, че започвайки от проективните трансформации, които, например, определен кръг носи в себе си, се достига до неевклидовата геометрия на Н. Лобачевски (1792 – 1856) (Вж. Trkovská 2007: 253).

Клайн е представител на аналитичното направление в областта на основите на геометрията (Рашевски 1978: 15). Но след възникването на новата неевклидова геометрия се поставя въпросът за валидността и истинността на геометрията изобщо в материалния свят. Или, от една страна да се обвърже нагледността с логическото изложение, но, от друга страна, да се обособи независимостта на логическото конструиране на геометрията спрямо геометричната нагледност (Рашевски 1978: 15). Клайн подхожда, търсейки логическата връзка на положенията в геометрията, и осъществява опит да обоснове върху нея развитието на различните геометрии. Ето защо концепцията на Клайн е и единна, синтезираща и обединяваща, и абстрактна, изцяло евристична, защото, едновременно утвърждава и обосновава валидността на евклидовата и неевклидовата геометрия. Първоначалното непосредствено (интуитивно) отношение на Клайн към въпросите самò е опосредстване, защото е отрицателното отношение на понятието към обекта. Това отрицание има в себе си порив да унищожи себе си, а по този начин прави себе си нещо просто, тъждествено. Така Програмата на немския математик резултира в тъждествеността, но откъм различието. Обект на изследване на Ерлангенската програма е науката геометрия, предмет на изследване са различните типове геометрии, а оперативните категории на Клайн са понятията „инвариант“, „група“, „група от трансформации“. Клайн разкрива различието на науката геометрия вътре в себе си и оттам достига простото тъждество, абстрактната всеобщност. Това е аналитичната страна на неговото мислене, която остава на това равнище и този резултат като простото тъждество е принцип, който все още не осъществява прехода, свързването на разликите. Но Клайн има намерение да свърже различията и в това се състои неговата епохална заслуга и своеобразие, бих я нарекъл философска, сиреч спекулативна евристика, при търсенето основанията на геометрията и математиката изобщо. Защото тъкмо *развитието на разликите* е това придвижване напред в познанието. Чрез субективното своеобразие в мисленето на Клайн, всъщност, се постига осъзнаване на идеята, че самите мисловни определения съдържат преход в себе си. В това върховно единство на всепроникващия логос, на субективността, от една страна, и на обективността, от друга страна, се осъществява същинското ставане на понятието, синтетичното придвижване напред в познанието. Клайн не заличава напълно всяко своеобразие на отношенията – нещо, което е характерно за аналитичното познание, – а по-скоро акцентира върху тези отношения, като ги поставя в основата на прехода от един тип геометрия към друг. Колкото и Клайн да анализира, той в действителност и синтезира, стремейки се да схване многообразието от определения и трансформации в тяхното единство, конкретно като проективна геометрия [3]. Привеждайки в отношение различията той установява необходимостта – *инвариантното*.

Ерлангенската програма на Клайн не е разбрана през 70-те и 80-те години на деветнадесети век. Едва след новото ѝ отпечатване през 1893 г. в списание *Mathematische Annalen*, на което той е дългогодишен редактор, идеите на Програмата биват осмислени и приети (Trkovská 2007: 255). Понятието „реалност“ у Клайн е не само този преход от абстракцията на битието към рефлексията и същността, което е ход на синтетичното познание. „Реалността“ е единството на аналитичното и синтетичното познание, абсолютната рефлексия на понятието, като тъждеството на различните геометрии в тяхното развитие и преход една в друга. Клайн не бяга от синтетичното познание. Нещо повече, моментите на абстрахиране, типологизиране и идеализиране, са моментите на понятието – всеобщност, особеност и единичност. Клайн създава синтетични отношения и закони, защото вплита своите субективни определения в своеобразната природа на геометричните предмети – да бъдат това, което са, независимо от допълнителните определения на пространството, като триизмерност, непрекъснатост, делимост и т. н. Но това е общият ход на познанието, защото всеобщността е първият момент на понятието, а особеността е второто, опосредстваното и опосредстващото на свой ред. Особеността като опосредстващо предпоставя и прехода от нещо първо. За пример, в геометрията трябва да се започне не с една конкретна пространствена фигура, а с простото като точка, линия..., което пък, от друга страна, е елемент на тази фигура. Но така се постига една синтетична наука, една система и систематично познание, както с право посочва Хегел (Хегел 1967: 316).

Така подхожда и Клайн, откъм дефиниции и абстрахиране през типологизации и подразделения накъм идеализации и постановяване на една цялостна „реална“ програма. Клайн разработва Ерлангенската програма откъм методологизираното познание, но не само посредством едностранчива абстракция, а чрез компаративен анализ на особените, различно определените геометрии и техните типични инварианти, с цел разпознаване на многообразните връзки на логическата схема. Достигайки метода на проективната геометрия, Клайн го разглежда като целокупност – цялото, което обгръща всичко особено и го запазва в себе си [4]. В действителност големият математик по-малко абстрахира и преди всичко идеализира, а впоследствие типологизира абстрактните и идеалните резултати. Той търси инвариантните същности в различните геометрии, като неговата научна трактовка на практика представлява елиминиране на непосредственото познание, на символа на всекидневното познание – обикновеното субект-обектно (S-O) отношение. Изследването на Клайн е методологично, защото той мисловно конструира чисти понятия, идеални обекти, които му вършат работа както в аналитичен, така и в синтетичен план, т. е. освен да изяснява определенията на различните геометрии той допълнително разширява познанието на науката геометрия изобщо. Като резултат след абстракциите и идеализациите Клайн се насочва към типологизиране на „различните геометрии според групите от преобразования, при които остават валидни техните предложения“ (Кокстер 1979: 264). Клайн определя дадена геометрия съгласно нейните същностни характеристики и я представя като проста цялост от основни свойства в системата на целокупната геометрия. Целта е обособяване на *инвариантни своеобразия*: „Като преходи от едни към други променливи, като преобразования в елементарната геометрия служат преди всичко транслациите и ротациите на геометричните фигури, при които самите фигури и разстоянията между образуващите ги точки остават неизменни“ (Кузнецов 1980: 19).

Например, инвариант на Евклидовата геометрия се явява теоремата на Питагор. При по-сложните геометрии, като проективната, инварианти са други изрази: „в проективната геометрия инварианти не са вече разстоянията между точките, не величината и формата на геометричната фигура, а единствено нейна форма – съотношенията между разстоянията; при проективно преобразование триъгълникът може да стане по-малък, но остава подобен на себе си“ (Кузнецов 1980: 19). Това са вече различните сечения. Идеята като „реалност“, духът като „реалност“ не е нещо абстрактно, а е движение, процес и покой едновременно. Различните геометрии необходимо съществуват, те са необходим етап, през който произлиза пълното, конкретно единство. Но ползотворното в подобно изследване, посредством абстракции, идеализации и накрая типологизация, която генерално определя и нормативира по схематичен начин, дава възможност и посока за по-нататъшно изследване. Това е евристичното, методологическата перспектива.

Големият немски философ Хегел посочва в какво се състои съдържанието на *теоремата* изобщо: „*...отнасящата се към себе си определеност*, разликата на предмета вътре в самия себе си и отношението на различаващите се определености една към друга. Дефиницията съдържа само *една определеност*, подразделението – определеността *спрямо други*; когато стигне до единичността, предметът вътре в самия себе си се е разложил на своите определености. Докато дефиницията остава при общото понятие, в теоремите, напротив, предметът е познат в неговата реалност, в условията и формите на неговото реално налично битие. Ето защо заедно с дефиницията теоремата излага *идеята*, която е единство на понятие и реалност“ (Хегел 1967: 323).

Подобно на Хегел, който разглежда историята на философията по особен, но „реален“ начин, то и Клайн се обръща специфично към историята на геометрията и на математиката въобще. Той методологизира и принципира инвариантното в историческия ход на своята наука. Метафизическата и метаматематическата позиция на Ерлангенската програма се осмисля откъм методологизираното понятие, като „система в развитие“ по аналогия с Хегеловата програма за историята на философията. По такъв начин вниманието е насочено към истинното, истински „реалното“ в конкретната област, към понятието *като такова*. Този подход обаче може да послужи и като модел, матрица, през призмата на която да се „отключи“ реалността, да се отправи взор към дълбините на битието. В това заляга своеобразната евристика, която е фундаментална част от духовната еволюция на човешкото същество.

Бележки:

1. В статията използвам английския превод – *A Comparative Review of Recent Researches in Geometry*, translated by Dr. M. W. Haskell, Assistant Professor of Mathematics in the University of California. Published in Bull. New York Math. Soc. 2, (1892-1893), 215-249. LaTeXed by Nitin C. Rughoonauth – според който е и цитирането.

2. Е. П. обикновено се възприема като „забележителност“ от математиката на XIX век. Макар под формата на статия (лекция), тя влияе изключително много върху геометрическото мислене, през втората половина на столетието, определяна е като най-влиятелната работа след „Елементи“ на Евклид и разработките на К. Фр. Гаус (1777 – 1855) и Б. Риман (1826 – 1866) (Birkhoff, Bennett 1988: 145).

3. В бележките на края на Е. П. Клайн посочва ясно, че разграничаването на аналитичното и синтетичното познание е старо разбиране. Анализът е първата необходима, но не единствена стъпка по пътя на развитие на познанието: Вж. “*On the Antithesis between the Synthetic and the Analytic Method in Modern Geometry*”: Klein 1892.

4. Кейли дори надценява универсалността на проективната геометрия, посочвайки: „По-систематичното изложение в настоящия уводен мемоар... би трябвало да игнорира съвсем понятието разстояние и метрична геометрия... Метричната геометрия е част от проективната геометрия, а проективната геометрия е цялата геометрия“. Той често нарича проективната геометрия „дескриптивна“. Вярно е, че тя включва афинната, евклидовата и неевклидовата

геометрия, но едновременно с това не включва общата риманова геометрия, както и топологията (Кокстер 1979: 297).

Библиография/References

Bashmakova, I. G., Kuzicheva, Z. A. 1981. Istoria na matematikata. T. IV. Izd. Nauka i izkustvo, Sofia. Prev. ot rus. ezik Vl. Sotirov. [Башмакова, И. Г., Кузичева, З. А. 1981. История на математиката. Т. IV. Прев. от рус. език Вл. Сотиров. София: Изд. Наука и изкуство].

Galua, E. 1936. Sochinenia. M. – L., ONTI. [Галуа, Е. 1936. Сочинения. М. – Л., ОНТИ]

Kleyn, F. 1937. Lektsii o razvitie matematiki v XIX stoletii. Ch. I. M. – L., ONTI. [Клейн, Ф. 1937. Лекции о развитие математики в XIX столетии. Ч. I. М. – Л., ОНТИ].

Kokster, H. 1979. Vechnata geometria. Izd. Nauka i izkustvo, Sofia. Prev. ot angl. ezik G. Stanilov. [Кокстер, Х. 1979. Вечната геометрия. Прев. от англ. език Г. Станилов. София: Изд. Наука и изкуство.].

Kuznetsov, B. G. 1980. Istoria na filosofiyata za fizitsi i matematitsi. Izd. Nauka i izkustvo, Sofia. [Кузнецов, Б. Г. 1980. История на философията за физици и математици. София: Изд. Наука и изкуство].

Rashevski, P. K. 1978. „Osnovi na geometriyata“ na Hilbert i myastoto im v istoricheskoto razvitie na vaprosa. v: Hilbert, D. 1978. Osnovi na geometriyata. Izd. Nauka i izkustvo, Sofia, 5-40. [Рашевски, П. К. (1978). „Основи на геометрията“ на Хилберт и мястото им в историческото развитие на въпроса. в: Хилберт, Д. 1978. Основи на геометрията. София: Изд. Наука и изкуство, 5-40].

Hegel, G. V. F. 1967. Naukata logika. T. II. Izd. BKP, Sofia. [Хегел, Г. В. Ф. 1967. Науката логика. Т. II. София: Изд. БКП].

Birkhoff, G., Bennett, M. K. 1988. Felix Klein and His “Erlanger Programm”. In: History and Philosophy of Modern Mathematics. Vol. XI. Ed. by William Aspray and Philip Kitcher. Minneapolis& University of Minnesota Press.

Ewald, W. 1996. From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. Vol. I. Oxford: Clarendon Press.

Klein, F. 1892. A Comparative Review of Recent Researches in Geometry. In: Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 2 (No. 1): 215-249. New York: Macmillan & Co.

Klein, F. 1896. The Arithmetizing of Mathematics. In: Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 2 (No. 8): 241-249. New York: Macmillan & Co.

Trkovská, D. 2007. Felix Klein and his Erlanger Programm. In: WDS’07 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 251-256. Prague: MATFYZPRESS.