Прозрения и заблуждения

Христо Манев
Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия, България
София 1164, бул. Христо Смирненски № 1

Резюме: *Анализирана е ролята на еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две множества при намиране на техните мощности както за крайните, така и за безкрайните множества. Определени са несравними една с друга мерни единици за мощност на множество.*
Ключови думи: *Мерни единици за мощност на множество.*

Insights and Delusions

Hristo Manev
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Bulgaria,
Sofia 1164, bul. Hristo Smirnenski No. 1

Abstract: *The role of one-to-one and invertible correspondence between the elements of two sets in finding their cardinalities for both finite and infinite sets have analyzed. Incomparable with each other units for cardinality of a set have defined.*
Keywords: *Units of measurement for the cardinality of a set*

В опита да дадат единно причинно-следствено обяснение на света, съставен от невероятно много разнообразно обособени неща, древните гърци стигат до идеята за неделими частици и празното, където се срещат с придружаващите тази идея парадокси. Заедно с основите на съвременната физика, в книгата „Обсъждания относно две нови науки“ [1] Галилео Галилей поставя началото за решаване и на трудно постижимото съчетаване на делимостта и неделимостта. При мисления опит за изграждане от неделими точки на непрекъсната величина, каквато е линията, той стига до извода, че това изисква безкрайно много такива точки, ако не искаме да си противоречим. Тъй като при крайно количество неделими точки, точно по средата на крайна непрекъсната линия може да се окаже неделима точка, при което или линията не може да се раздели на две равни части или точката е делима. Така възниква проблемът за измерване количеството на неброима безкрайност на множество от точки върху крайна линия и количеството на броима безкрайност на множество от естествени числа **N**. Нормално е при такова начално разграничаване на двата типа числови безкрайности да не се осъзнае тяхната съществена различност, при което да не се знае, че начините за измерване на техните количества са съществено различни. В случая е важно, че се използва еднозначно и обратимо съответствие между елементите на безкрайното множество на всички естествени числа **N** и елементите на безкрайното подмножество на техните квадрати като критерий за определяне на количеството елементи на броимо безкрайно множество, наричано още *мощност на множеството*. Обаче еднозначно и обратимо съответствие има освен при броимите безкрайни множества, също така и при неброимите безкрайни множества, както и между онези преброими крайни множества, които имат еднаква мощност. При това свойствата на тези три различни типа множества имат различни качества, поради което и еднозначното и обратимо съответствие за всяко от тях се проявява по различен начин, при което и единиците мерки за измерване на техните мощности са различни. Затова тук дебнат три изненади, които са разкрити много по-късно.

Първата изненада се състои в това, че са́мо за **преброимите крайни множества** еднозначното и обратимо съответствие между елементите на две множества е достатъчно за непосредствено доказване на равенство между техните мощности, понеже при всяко подреждане на техните елементи винаги има последен елемент. Защото броима безкрайност на множество $\boldsymbol{X}$ се доказва от факта, че при съпоставянето му с броимото безкрайно множество **N** всеки елемент от количеството елементи на множеството $\boldsymbol{X}$ може да се съчетае точно с един елемент от безкрайното количество елементи на множеството **N**. Докато преброима крайност на множество $\boldsymbol{X}$ се доказва от факта, че при съпоставянето му с броимото безкрайно множество **N** и съчетаване на всеки елемент от количеството елементи на множеството $\boldsymbol{X}$ чрез <u>бройната единица 1</u> с точно един елемент от безкрайното количество елементи на множеството **N**, количетвото елементи на множеството $\boldsymbol{X}$ се изчерпва до крайно бройно число n от безкрайното количество елементи на множеството **N**. Разликата между двете доказателства е в наличието на *последен елемент* при преброимо крайно множество и в липсата на такъв елемент при броимо безкрайно множество. Именно изчерпването до едно и също крайно бройно число n от безкрайното количество елементи на множеството **N** на всяко от двете съпоставяни преброими крайни множества осигурява равенство на техните мощности на едно и също число n при еднозначно и обратимо съответствие между техните елементи и елементите на **N**.

Втората изненада се състои в това, че при числовите **броими безкрайни множества**, каквито са броимото безкрайно множество **N** и негово собствено безкрайно подмножесто няма последен елемент, обаче между техните елементи винаги има числова закономерна връзка, която се идеализира като неограничена. Затова при съпоставяне на две такива множества между техните елементи са възможни са́мо два съществено различни начина на еднозначно и обратимо съответствие: а) чрез несъобразено със закономерностите им еднозначно и обратимо (несъобразно взаимно броимо) съответствие между техните елементи, и, б) чрез съобразено със закономерностите им еднозначно и обратимо (съобразно взаимно броимо) съответствие между техните елементи. От една страна броимото безкрайно множество **N** на естествените числа е в несъобразно взаимно броимо съответствие с всяко от своите безкрайни собствени подмножества, каквито са и те помежду си заради тяхната безкрайност. Ето защо съществуването на несъобразно взаимно броимо съответствие между елементите на съпоставяните по този начин множества *доказва са́мо броимата безкрайност на множествата*, но не и тяхна равномощност. От друга страна количеството елементи на безкрайните собствени подмножества на **N** най-често са съществено различни поради различните закономерностите, които ги определят. Несъмнено е, че например безкрайното количество на четните числа представлява точно половината от елементите на цялото безкрайно количество елементи $\aleph_0$ на множеството **N**, докато другата половина на неговото безкрайно количество елементи се представя точно от безкрайното количество на неговите нечетни числа. Обърнете внимание, че при така направената преценка за отношението между броимите безкрайни мощности на тези броими безкрайни множества се използва не бройната единица 1 за преброима крайна мощност n, която единица мярка е неприложима за броима безкрайна мощност, а <u>броимата безкрайна мощност $\aleph_0$</u> като единица мярка за мощност на броимо безкрайно множество. Затова при съпоставяне на множеството **N** и негово безкрайно собствено подмножество отношението между техните броими безкрайни мощности трябва да се определя не чрез неразличаващото ги несъобразно взаимно броимо съответствие между техните елементи, а *посредством различаващо ги съобразно взаимно броимо съответствие*. Понеже основателно може да бъдат сравнявани са́мо еднородни количества, а еднородността им при разглежданите обстоятелства се определя от еднаквостта (или аналогичността) на вида закономерност. В общия случай по-голямото от двете множества не участва в съответствието с всичките си елементи.

Третата изненада се състои в това, че според своята мерност числовите **неброими безкрайни множества** може да бъдат едномерни – каквото е безкрайното множеството от точки, които отговарят на реалните числа **R** и неговите неброими безкрайни собствени подмножества върху безкрайна числова линия. Двумерни – каквото е безкрайното множество от точки по безкрайна повърхнина и неговите неброими безкрайни собствени подмножества. Тримерни – каквото е безкрайното множество от точки в безкрайно тримерно пространство и неговите неброими безкрайни собствени подмножества. Повечемерни – каквито са безкрайните множества от точки при другите случаи на пространства с повече целочислени измерения и съответните им неброими безкрайни подмножества. Освен това безкрайното множество от точки върху безкрайна числова линия е несравнимо по мощност с безкрайното множество от точки по безкрайна повърхнина, безкрайното множество от точки по безкрайна повърхнина е несравнимо по мощност с безкрайното множество от точки в безкрайно тримерно пространство, както е и при останалите случаи на безкрайни множества от точки във всеки две пространства с различни целочислени измерения. Поради това еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две подмножества на такива множества е възможно са́мо когато заеманите от тях пространствени протяжности имат еднакво целочислено измерение. В тези случаи отношението между неброимите безкрайни мощности на две неброими безкрайни подмножества, представени от крайни части на пространствена протяжност с дадено целочислено измерение, се намира от отношението между заеманите от тях размери на протяжността, определени с предварително избраната за единица мярка крайна част от протяжност със същото целочислено измерение.

При така изложените условия, които определят съществуването на еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две преброими крайни множества, то има ролята представена във втория абзац на тази статия. Условията и ролята на такова съответствие между елементите на две числови броими безкрайни множества са представени в третия абзац на статията. Докато условията и ролята на еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две числови неброими безкрайни множества са представени в четвъртия абзац на статията. С оглед на описаните недостъпни за времето на Галилей обстоятелства съвсем естествено е неговото заключение, че „атрибутите „равно“, „по-голямо“ и „по-малко“ не са приложими към безкрайни, а са́мо към крайни количества“.

В края на 19-ти век Георг Кантор разграничи броимата безкрайна мощност на броимото безкрайно множество на естествените числа **N** като несравнимо малка по отношение на неброимата безкрайна мощност на неброимото безкрайно множество на реалните числа **R**. Неговото голямо прозрение с неосъзнати досега последствия се състои в означаването на тези безкрайни количества със съответни букви, каквито са буквата алеф-нула $\aleph_0$ и буквата c. С това означаване броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ по дефиниция се превърна в строго определено броимо безкрайно количество, което е несравнимо голямо спрямо преброимо крайно количество n на кое да е преброимо крайно множество, и несравнимо малко по отношение на неброимото безкрайно количество c на неброимото безкрайно множество **R**. Твърде много и изключително сложни са проблемите, които възникват от решителното разграничаване на двата типа безкрайности, направено от Кантор. Затова тук ще бъде засегнат са́мо големият проблем, че не са́мо той, но толкова математици след него и досега не се съобразяват с разликата между двата съществено различни начина на еднозначно и обратимо съответствие между елементите на цялото броимо безкрайно множество **N** и елементите на негово безкрайно собствено подмножество, описани в третия абзац. Поради неоснователното използване на несъобразно еднозначно и обратимо съответствие между елементите на такива множества като критерий за еднаквост на техните мощности неправилно се счита, че всички безкрайни собствени подмножества на **N** са равномощни на $\aleph_0$. И след като Кантор доказа, че и елементите на броимото безкрайно множество на рационалните числа **Q** са в несъобразно еднозначно и обратимо съответствие с елементите на броимото безкрайно множество **N** сега се приема, че и мощността на множеството **Q** е равна на $\aleph_0$. Обаче множеството **Q** се дефинира с отношението $\frac{a}{b}$, където a и b са произволни естествени числа (като $b \neq 0$). По този начин броимото безкрайно множество **Q** съдържа заедно с всички естествени числа и всички дробни числа. При това е доказано, че между всеки две дробни числа винаги има и още едно дробно число, т.е. *дробните числа са неограничено нагъсто върху числовата линия*. За разлика от общоприетия абсурд за равенство на тези мощности, в статията „Математични величини“ [2] е показано, че мощността $\aleph_q$ на множеството **Q** е по-голяма от мощността $\aleph_0$ на множеството **N**.

Неоснователното използване на еднозначно и обратимо съответствие и при съпоставяне между елементите на две неброими безкрайни подмножества като критерий за равенство между техните мощности води до невероятното заключение, че количеството на точките на подмножеството в интервала от 0 до 1 е равно на количеството на точките на множеството от точки върху безкрайна числова линия. Нещо повече. Кантор не се съобразява и с несъизмеримостта по мощност между подмножества от точки във всеки две пространства с различни целочислени измерения. По този начин той стига до извода, че колкото точки има в интервала от 0 до 1 толкова точки има не само върху цялата безкрайна числова линия, но също така по цялата безкрайна повърхнина, в цялото безкрайно тримерно пространство и изобщо във всяко пространство с повече целочислени измерения. Когато установи това, в писмо до Дедекинд Кантор възкликна пред своята самозаблуда така: „Виждам го, но не мога да го повярвам!“. Тази самозаблуда е общоприета като чиста истина от сегашната световна математическа гилдия! – за справка вижте в Интернет статията “Georg Cantor” и по-точно нейната част One-to-one correspondence в Wikipedia.

References:

[1] G. Galilei, Discorsi E Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze, 1st ed, Elzevier Press, Leiden, the Netherlands, 1638.

[2] H. Manev, Mathematical Magnitudes, International Mathematical Forum – Hikari, Vol. 16, 2021, no. 3, 137 – 146.