Мощност на множество

Христо Манев,

Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия, България

София 1164, бул. Христо Смирненски № 1, cfi@dir.bg

Cardinality of a Set

Hristo Manev,

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Bulgaria,

Sofia 1164, bul. Hristo Smirnenski No. 1

Резюме: *Разкрита е различната роля на еднозначното и обратимо съответствие при крайните и при безкрайните множества. Показано е как броимата безкрайна мощност (алеф-нула) на броимото безкрайно множество на естествените числа N се използва като единица мярка за сравняване мощността на различни броими безкрайни множества. Разгледани са важни следствия от това съществено преустройство на теорията на множествата.*

Ключови думи: *Множество, Мощност, Мерни единици за мощност*

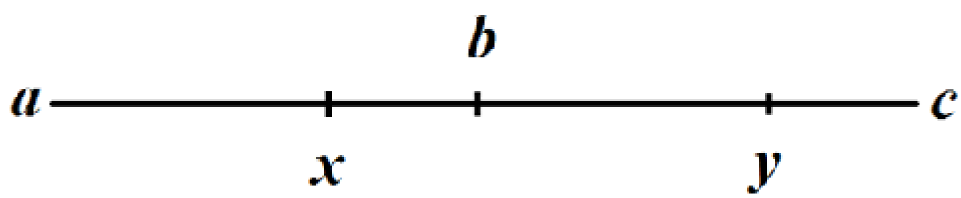
Abstract: *The different role of the unambiguous and invertible correspondence at the finite and at the infinite sets has revealed. It is shown how the countably infinite cardinality (aleph-zero) of the countably infinite set of the natural numbers N is used as a unit of measurement to compare the cardinality of different countably infinite sets. Other important corollaries of this significant reorganization of the set theory are also considered.*

Keywords: *Set, Cardinality, Units of measurement for cardinality*

1. Въведение

Сегашната теория на множествата не се съобразява с различните свойства на трите основни вида числови множества: а) *преброими крайни* – каквито са преброимите крайни подмножества на броимото безкрайно множество на естествените числа **N**; б) *броими безкрайни* – каквито са броимото безкрайно множесто на естествените числа **N** и неговите броими безкрайни собствени подмножества, както и броимото безкрайно множество на рационалните числа **Q** и неговите броими безкрайни собствени подмножества; в) *неброими безкрайни* – каквито са едномерното неброимо безкрайно множество от точки на реалните числа **R** и неговите неброими безкрайни собствени подмножества, както и следващите неброими безкрайни числови множества от точки, които заемат повечемерните пространствени протяжности и съответните им неброими безкрайни собствени подмножества. При съответни условия и при трите вида числови множества има еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две подмножества във всяко от тях, но поради разликата между свойствата на тези множества, количеството на принадлежащите им елементи, наричано тяхна *мощност*, се сравнява по три съществено различни начина. При това само за преброимите крайни подмножества такова съответствие е достатъчно за доказване равномощността на две такива подмножества, докато при броимите и при неброимите безкрайни подмножества съществуването на еднозначно и обратимо съответствие вече не е достатъчно за доказване на тяхната равномощност.

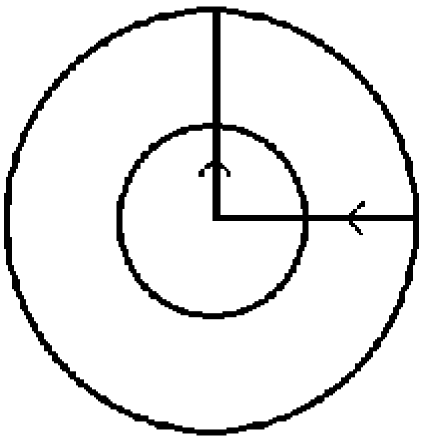
В параграфи 20, 21, 22, 23 и 24 на книгата „Парадокси на безкрайността“ [1] на Бернард Болцано е показано, че еднозначното и обратимо съответствие между елементите на две преброими крайни подмножества на **N** е достатъчно за доказване на равенство между техните мощности. При неброимите безкрайни числови подмножества обаче съществуването на такова съответствие не е достатъчно за доказване на равенство между техните мощности. Защото съотношението между мощностите на такива подмножества от точки, които заемат някакви крайни части на пространствена протяжност с едно и също целочислено измерение, се определя посредством съотношението между размерите на заеманите от тях крайни части на съответната пространствена протяжност. В дадения от Болцано пример с едномерни такива подмножества, размерите на заеманите от тях крайни части на протяжността са съответните им дължини върху числовата линия. Така от уравнението $5y = 12x$ и отговарящата на него фигура в §20 се вижда, че безкрайното подмножество на реалните числа в интервала от 0 до 5 е в еднозначно и обратимо съответствие с безкрайното подмножество на реалните числа в



Фиг. 1. Графика, отговаряща на уравнението 5y = 12x.

интервала от 0 до 12. Обаче първото подмножество несъмнено представлява собствено подмножество на второто подмножество, защото заетата от него дължина върху числовата линия е само крайна част от дължината, която е заета от второто подмножество. В края на §28 Болцано обобщава откритието си така: „ … правилното пресмятане на безкрайното има за цел не … пресмятане на безкрайното множество самó по себе си …, а определяне на *съотношение* между едно безкрайно и друго …“. Освен това, в §40 и §48 с примери е показана несъизмеримостта между мощността на множеството на точките върху числова линия с мощността на множеството на точките по повърхнина, и на мощността на множеството на точките по повърхнина с мощността на множеството на точките в тримерно пространство – вж. примерите в края на подраздела **3.2**. Поради това мощностите на безкрайните собствени подмножества на тези три подвида неброими безкрайни числови множества, които заемат протяжности с различно целочислено измерение се сравняват с качествено различни единици мерки съответно за дължина, за площ, и за обем. От това следва, че свойството за сравнимост между размерите на количествата елементи на две такива математични величини, каквито са множествата, е валидно само при наличието на еднородна единица мярка за тези количества и на двете величини. Заедно с това следва да различаваме еднозначното и обратимо съответствие между неброими безкрайни точкови подмножества с различни техни размери, като например: подмножеството от точките в интервала от 0 до 1 и множеството от точките върху безкрайна числова линия или подмножеството от точките в някакъв друг краен интервал от нея.

Приносът на Болцано за обосноваване на теорията на множествата и досега не е забелязан. Свидетелство за това е книгата на Харди Грант и Израел Клайнер „Преломни точки в историята на математиката“ [2], публикувана през 2016 г. Нейната 9-та глава „Безкрайността: от потенциална към актуална“ гъмжи от неправилни обяснения поради наложилото се схващане, че *съществуването на еднозначно и обратимо съответствие* между елементите на две множества е достатъчно за доказване равномощността на тези множества независимо от това дали те са крайни или са безкрайни. Това схващане е опровергано и в §41 на книгата [1]: „В две съвършено подобни една на друга протяжности множествата на техните точки трябва да се намират в такова именно съотношение, в каквото са и техните размери“. Например точките на две концентрични окръжности с различни радиуси са в еднозначно и обратимо съответствие, което се установява с построяване на кой да е радиус от центъра към тях. Обаче при безкрайно намаляване на радиуса на по-малката окръжност се стига до неправилния извод, че в техния център има също толкова безкрайно много точки, когато той се състои са́мо от една точка. Затова Фиг. 9.1 на стр. 76 в книгата [2] с обяснението „Две концентрични окръжности с нееднакъв диаметър, но с еднакъв брой точки“ бележи изостаналостта на сегашната теория на множествата в сравнение с постигнатото от Бернард Болцано – вж. тук Фиг.2, която е еднаква с Фиг. 9.1.



Фиг. 2.

Георг Кантор определи броимата безкрайна мощност на броимото безкрайно множество на естествените числа **N** като несъизмеримо малка по отношение на неброимата безкрайна мощност на неброимото безкрайно множество на реалните числа **R**. Неговото голямо прозрение с неосъзнати досега последствия се състои в означаване на тези безкрайни количества със съответни букви, каквито са буквата алеф-нула $\aleph_0$ и буквата *c*. С това означаване броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ по дефиниция се превърна в строго определено броимо безкрайно количество, което е несъизмеримо голямо спрямо преброимо крайно количество *n* на кое да е преброимо крайно подмножество на **N**, и несъизмеримо малко по отношение на неброимото безкрайно количество *c* на неброимото безкрайно множество **R**. И тъкмо затова броимата безкрайна мощност на $\aleph_0$ представлява естествената единица мярка за сравняване мощността на броимите безкрайни множества.

2. Сравняване мощността на броимите безкрайни множества с $\aleph_0$

Множество най-общо може да се дефинира като мислено създадено единство, което съдържа добре определени и различни едно от друго неща, наречени елементи на множеството. Понеже всеки вид безкрайност представлява конкретна крайна определеност, която се идеализира като неограничена, затова основните свойства на така дефинираните множества и свойствата на техните елементи се разкриват най-лесно, когато добре определените елементи на множеството са бройни естествени числа, каквито са елементите на стандартно дефинираното броимо безкрайно бройно множество **N**.

В английския език естествените числа на множеството **N** се наричат „cardinal natural numbers", което води до двусмисленост поради наличието и на термина "cardinality" за означаване на количеството елементи в едно множество. За избягване на тази двусмисленост, в английския текст вместо термина „cardinal natural numbers" се използва терминът *countal natural numbers*. В подраздела **3.4**, където се говори както за *бройни естествени числа* така и за *редни естествени числа* (на английски *ordinal natural numbers*), последните два термина се използват в несъкратен вид. За олекотяване на терминологията, на другите места се използва съкратеният термин *естествени числа*, вместо несъкратения термин *бройни естествени числа*.

Най-обща характеристика на всяко множество ***X*** е количеството на принадлежащите му елементи, наричано мощност на множеството и означавано с |***X***|. Броима безкрайност на множество ***X*** се доказва от факта, че при съпоставянето му с броимото безкрайно множество **N** всеки елемент от количеството елементи на множеството ***X*** може да се съчетае точно с един елемент от безкрайното количество елементи на множеството **N**. Докато преброима крайност на множество ***X*** се доказва от факта, че при съпоставянето му с броимото безкрайно множество **N** и съчетаване на всеки елемент от количеството елементи на множеството ***X*** чрез бройната единица 1 с точно един елемент от безкрайното количество елементи на множеството **N**, количтвото елементи на множеството ***X*** се изчерпва до крайно бройно число n от безкрайното количество елементи на множеството **N**. Причината за разликата между двете доказателства е в наличието на последен елемент при преброимо крайно подмножество на **N** и в липсата на такъв елемент при броимите безкрайни множества.

Мощността на преброимо крайно подмножество на **N** ще наричаме преброима крайна мощност n.

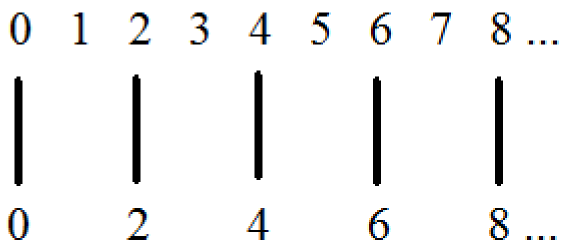
Съпоставянето между две преброими крайни множества чрез хармонично съчетаване на техните елементи представлява биекция, когато между тези елементи има произволно осъществимо еднозначно и обратимо съответствие, означавано още като едно към едно (1–1) съответствие. При такова съответствие всеки елемент на едното множество е съчетан точно с един елемент на другото множество и всеки елемент на другото множество е съчетан точно с един елемент на първото множество. Тъй като при всяко нареждане на елементите на преброимо крайно множество винаги има последен елемент, съществуването на биекция между две такива множества е достатъчно за доказване на равенство между техните преброими крайни мощности.

Сред елементите на числово броимо безкрайно множество няма последен елемент, обаче създаването на такова множество е невъзможно без използването на закономерна връзка между неговите елементи, която се идеализира като неограничена. Затова при съпоставянето между две такива множества техните елементи може хармонично да се съчетаят само по два съществено различни начина: а) чрез несъобразено със закономерностите им еднозначно и обратимо (несъобразно взаимно броимо) съответствие между техните елементи – вж. Фиг. 7, и б) чрез съобразено със закономерностите им еднозначно и обратимо (съобразно взаимно броимо) съответствие между техните елементи – вж. Фиг. 3, Фиг. 4 и Фиг. 5.

От една страна безкрайното множество **N** на естествените числа е в несъобразно взаимно броимо съответствие с всяко от своите безкрайни собствени подмножества, каквито са и те помежду си заради тяхната безкрайност. Ето защо съществуването на несъобразно взаимно броимо съответствие между техните елементи е критерий само за безкрайността на тези подмножества, но не и за количеството на техните елементи. От друга страна количеството елементи на броимите безкрайни собствени подмножества на **N** най-често са съществено различни поради нееднаквост между закономерностите, които ги определят. Сигурно е, че например безкрайното количество на четните числа представлява точно половината от елементите на цялото безкрайно количество елементи $\aleph_0$ на множеството **N**, докато другата половина на неговото безкрайно количество елементи се представя точно от безкрайното количество на неговите нечетни числа. Обърнете внимание, че при така направената преценка за съотношението между мощностите на тези броими безкрайни множества се използва не бройната единица 1 за преброима крайна мощност *n*, която единица мярка е неприложима за броима безкрайна мощност, а броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ като единица мярка за мощност на броимо безкрайно множество. Затова при съпоставянето между две такива множества съотношението между техните броими безкрайни мощности трябва да се определя не чрез неразличаващото ги несъобразно взаимно броимо съответствие между елементите на множествата, а посредством различаващо ги съобразно взаимно броимо съответствие. Защото основателно може да бъдат сравнявани само еднородни количества, а еднородността им при тези обстоятелства се определя от еднаквостта (или аналогичността) на вида закономерност. В общия случай по-голямото от двете множества не участва в съответствието с всичките си елементи.

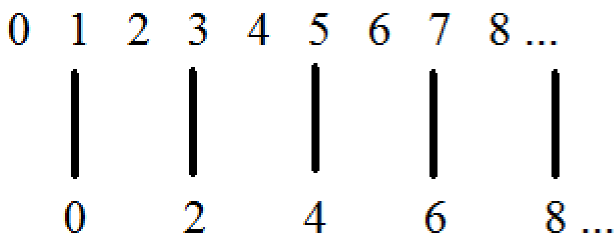
Когато мощностите на две броими безкрайни множества са различни, като например мощността $\aleph_0$ на множеството **N** и мощността p_s на множеството на четните числа, тогава хармоничното съчетаване между техните елементи в случая може да се направи съобразно по описаните три различни начина:

а) Инекция първа при $p_s < \aleph_0$ – вж. Фиг. 3. Когато определеното от закономерността четност по-малко безкрайно количество елементи на множеството на четните числа се поставят в съобразно взаимно броимо едно към едно (1–1) съответствие с определеното от същата закономерност безкрайно количество елементи на собственото подмножество на четните числа на множеството **N**, при което без съответствие с елементите от множеството с по-малко количество елементи остават в случая нечетните числа от множеството с по-голямо количество елементи.



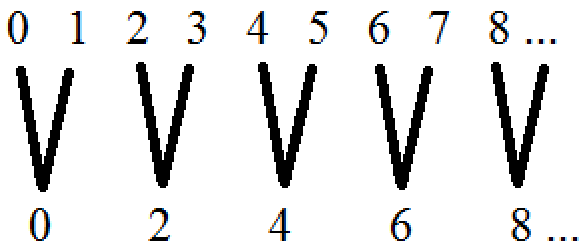
Фиг. 3. Илюстрация на инекция първа.

б) Инекция втора при $p_s < \aleph_0$ – вж. Фиг. 4. Когато определеното от закономерността четност по-малко безкрайно количество елементи на множеството на четните числа се поставят в съобразно взаимно броимо едно към едно (1–1) съответствие с определеното от аналогична закономерност безкрайно количество елементи на собственото подмножество на нечетните числа на множеството **N**, при което без съответствие с елементите от множеството с по-малко количество елементи остават в случая четните числа от множеството с по-голямо количество елементи.



Фиг. 4. Илюстрациа на инекция втора.

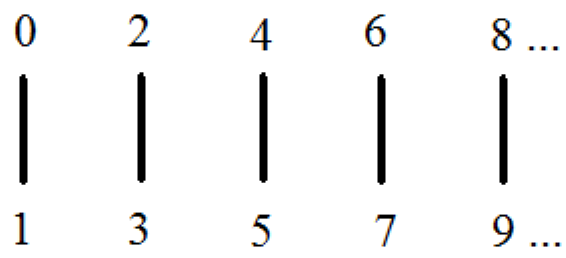
в) Сюрекция при $\aleph_0 > p_s$ – вж. Фиг. 5. Когато повече от един елемента на множеството с по-голямото безкрайно количество елементи се поставят в съобразно, в този случай две към едно (2–1) (отговарящо на вида закономерности) взаимно броимо съответствие с всеки един от елементите на множеството с по-малкото безкрайно количество елементи, при което обстоятелство няма оставащи без съответствие елементи от множеството с по-голямото количество от тях.



Фиг. 5. Илюстрация на сюрекция.

А когато мощностите на две броими безкрайни множества са равни, каквито в случая са мощността p_{s1} на множеството на четните числа и мощността p_{s2} на множеството на нечетните числа, тогава хармоничното съчетаване между техните елементи може да се направи само по един начин, да го наречем аналогично:

г) Биекция при $p_{s1} = p_{s2}$ – вж. Фиг. 6. Когато безкрайните количества елементи на двете множества се поставят в съобразно взаимно броимо едно към едно (1–1) съответствие без остатък и без сюрекция, с което се доказва равномощността на две броими безкрайни множества, подобно на биекция при доказване равномощността на две преброими крайни множества.



Фиг. 6. Илюстрация на биекция при броими безкрайни множества.

За намиране на съотношението между мощността $\aleph_0$ на множеството **N** и мощността p_i на кое да е негово безкрайно собствено подмножество, както и съотношението между мощностите на кои да е две негови безкрайни собствени подмножества, представени от съответните редици, в общия случай следва да използваме идеята на Болцано за съотношението между сумите от техните членове, които обаче са в обсега на крайно разстояние *d* от началото на редицата на естествените числа. Например съотношението между мощността на подмножеството от квадратите на естествените числа и мощността $\aleph_0$ на множеството **N** се намира правилно и все по-точно от съотношенията на последователно определените съответни суми: 1 към 1; 5 = 1+4 към 10 = 1+2+3+4; 14=1+4+9 към 45 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9; и т.н. В случая тези суми са определени за няколко разстояния, на които се намират няколко последователни начални члена от редицата на квадратите на естествените числа. Така от една страна се получава сумата, представена са́мо от членовете на редицата на квадратите на естествените числа за определено разстояние от началото на редицата на естествените числа. Докато от друга страна към същата сума се прибавя и сумата, представена от естествените числа, които не са точни квадрати на такива числа за същото разстояние. Безкрайното количество на числата неточни квадрати се увеличава в прогресираща аритметична прогресия, при която това количество след първата стъпка ($2^2 = 4$) на редицата на квадратите на числата се състои от числата 2 и

3, а с всяка следваща стъпка на редицата на тези числа количеството на прибавените числа неточни квадрати се увеличава с две, като самите те стават все по-големи. Откъдето следва, че в случая сравняваните две мощности са непропорционални.

Според съотношението $r_i = \dfrac{p_i}{\aleph_0}$ на мощността p_i на i-то броимо безкрайно собствено подмножество на множеството **N** спрямо безкрайната мощност $\aleph_0$, мощностите на неговите безкрайни собствени подмножества най-общо може да се разделят на пропорционални на $\aleph_0$ и на непропорционални на $\aleph_0$. Пропорционалните по мощност на $\aleph_0$ безкрайни собствени подмножества на множеството **N** се представят с редици, между членовете на които има едно и също разстояние, измерено с количеството членове на редицата на множеството **N**. Тяхната постепенно намаляваща броима безкрайна мощност p_k се представя със съотношението $\aleph_0/k$:

a_1) 1, 2, 3, …, n, …	$\aleph_0$
a_2) 2, 4, 6, …, 2n, …	$\aleph_0/2$
a_3) 3, 6, 9, …, 3n, …	$\aleph_0/3$
----------	----------
a_k) k1, k2, k3, …, kn, …	$\aleph_0/k$
----------	----------

където k е естествено число по-голямо от единица.

Докато непропорционалните по мощност на $\aleph_0$ броими безкрайни собствени подмножества на множеството **N**, като безкрайното собствено подмножество на квадратите на естествените числа, се представят с редици, между членовете на които при всяка от тях разстоянието се увеличава с всяка следваща стъпка според определен за нея закон:

а) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$
б) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3, \ldots$
в) $1^4, 2^4, 3^4, \ldots, n^4, \ldots$

Ето и още един такъв пример на броими безкрайни собствени подмножества на множеството **N**, представяни от редиците с нарастващи степени на простите числа, които са непропорционални по мощност на $\aleph_0$ и чиято мощност намалява с безкрайната последователност на тези числа:

г) $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$
д) $3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$
е) $5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^n, \ldots$

Неброимата безкрайна мощност *c* на множеството **R** е несъизмеримо голяма по отношение на броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ на множеството **N**. Подобно на нея и броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ на множеството **N** е несъизмеримо голяма в сравнение с преброима крайна мощност *n* на кое да е преброимо крайно подмножество на **N**. Има съществена разлика между свойствата на преброимите крайни подмножества на броимото безкрайно множество на естествените числа **N** и свойствата на самото броимо безкрайно множество на естествените числа **N** и на неговите броими безкрайни подмножества, както и между свойствата на споменатите броими безкрайни множества и свойствата на неброимото безкрайно множество на реалните числа **R** и на неговите неброими безкрайни подмножества. Затова техните мощности съответно се сравняват с несъизмерими една с друга единици мерки, а именно: с бройната единица 1 – за преброимите крайни множества; с броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ – за броимите безкрайни множества; и с неброимата безкрайна мощност на неброимото безкрайно подмножество на предварително избраната за единица мярка крайна част от пространствена протяжност, която има еднакъв брой измерения с броя на измеренията на заеманата от измервания подвид подмножество пространствена протяжност – за неброимите безкрайни множества. Затова крайното количество елементи на преброимите крайни подмножества на **N** се дава с техния краен брой *n*. Безкрайното количество елементи на пропорционалните на $\aleph_0$ броими безкрайни собствени подмножества на **N** се изразява с крайна част от единицата мярка $\aleph_0$, а на непропорционалните на $\aleph_0$ броими безкрайни собствени подмножества на **N** безкрайното количество елементи е обратно пропорционално на бързината, с която мощността на съответното безкрайно собствено подмножество на **N** клони към нула спрямо $\aleph_0$. Докато съотношението между неброимите безкрайни мощности на две неброими безкрайни подмножества, представени от крайни части на пространствена протяжност с дадено целочислено измерение, се намира от съотношението между заеманите от тях размери на протяжността, определени с размера на предварително избраната за единица мярка крайна част от протяжност със същото целочислено измерение. Изобщо според вида на единицата мярка и вида на измерваното количество елементи на множеството тук са разгледани четири случая:

1. атомизирана крайна единица мярка за преброимо крайно количество – при преброими крайни подмножества

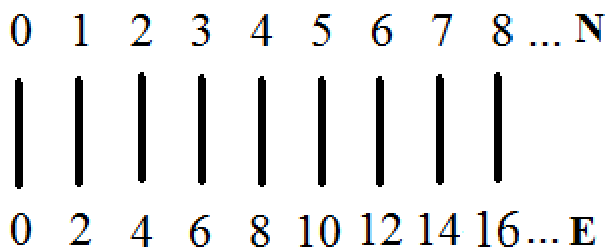
2.1 порциолизирани безкрайни единици мерки за броими безкрайни количества – при пропорционални на $\aleph_0$ броими безкрайни подмножества

2.2 скоростни безкрайни единици мерки за броими безкрайни количества – при непропорционални на $\aleph_0$ броими безкрайни подмножества

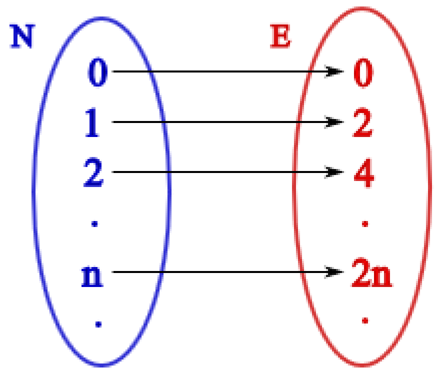
3. пространствена крайна единица мярка за неброимо безкрайно количество с дадено целочислено измерение – при неброими безкрайни подмножества.

Показаният метод за измерване мощността на броимите безкрайни подмножества с броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ е доказателство, че и при този вид безкрайни подмножества, както и при неброимите безкрайни подмножества съществуването на еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две безкрайни подмножества не е достатъчно за доказване на равенство между техните мощности. А сега приетото определение за биекция при съпоставянето на две броими безкрайни множества се опровергава по следния начин:

На Фиг. 7 е показано несъобразното взаимно броимо съответствие между елементите на цялото множество на бройните естествени числа **N** с елементите на неговото собствено подмножество на четните числа **E**. На Фиг. 8 същото съответствие между елементите на множествата **N** и **E** сега се дава като пример за биекция, т.е. като критерий за равенство между безкрайните количества на техните елементи. Обаче дефиниицията за



Фиг. 7. Илюстрация на несъобразно взаимно броимо съответствие.



Фиг. 8. Илюстрация на същото несъобразно взаимно броимо съответствие, което неправилно се приема за биекция.

собствено подмножество гласи, че всички елементи на собственото подмножество ***X*** трябва да принадлежат на цялото множеството ***Y*** и собственото подмножество ***X*** трябва да е различно от цялото множество ***Y***, т.е. $(X \subset Y) \leftrightarrow (\forall x(x \in X \rightarrow x \in Y)) \wedge (X \neq Y)$. От това следва, че собственото подмножество ***X*** трябва да има по-малко количество елементи от количеството елементи на цялото множество ***Y***. В случая подмножеството **E** на четните числа следва да е с по-малко количество елементи от количеството елементи на цялото множество **N**. Така се стига до явното противоречие $X \wedge \neg X$ между двата несъвместими извода, че множествата **N** и **E** хем имат еднакво количество елементи, хем едното от тях има по-малко количество елементи от другото. Понеже цялото е нещо повече от негова съставна част, затова е неправилно, показаното на Фиг. 8 несъобразно взаимно броимо съответствие между елементите на множествата **N** и **E** да се приема като доказателство за равенство между количествата на техните елементи.

Освен това, по-горе вече е показана дефиниция за биекция при броимите безкрайни подмножества, която е подобна на дефиницията за биекция при преброимите крайни подмножества. Поради посочения досегашен абсурд неправилно се счита, че всяко едно от безкрайните собствени подмножества на множеството **N** е равномощно на множеството **N**. Оттук следва и неправилната дефиниция: едно множество е безкрайно, „ако има равномощно на себе си собствено подмножество“, вместо правилната дефиниция: *ако е в несъобразно взаимно броимо съответствие със собствено подмножество*.

3. Други важни следствия

3.1 Има множество с мощност между $\aleph_0$ и *c*

Мерането в обективната реалност представлява определяне на съотношение между обекти. Процесът мерене винаги е свързан с представа за съотнасяните обекти и става завършено цяло, наречено измерване, едва когато мерещият изтълкува получения резултат. Всеки обект се описва с някакви съществени признаци, наричани негови качества. Физичните величини са характеристики на обективната реалност, които отговарят на определени качества. При мерението някои физични величини проявяват приемливо добро за сравняване по степен свойство, наречено количество y на измерваната величина $\boldsymbol{Y}$. Величината $\boldsymbol{Y}$ е първичен белег, по който може да разграничаваме едно нещо от други, различни от него неща изобщо, докато количеството y е вторичен белег, по който сме в състояние да разграничаваме едно от друго различни неща за една и съща величина, когато те се проявяват като сравнимо по степен свойство на тази величина. Изобщо количеството е идеализирано, сравнимо по степен свойство, присъщо на някаква величина.

Началното понятие за число x възниква с универсалното означаване на количествено съотношение между едно определяно количество y и друго определено от същото количество u, предварително избрано за единица мярка

(1) $\mathrm{x} = \dfrac{y}{u}$.

При това, размер на определено количество y е изразът му xu, където мерното число x се нарича стойност на количеството y, представено чрез единица мярка u. В теорията на числата и останалите две букви в уравнение (1) се идеализират като числа при действието делене.

Съвременната фактическа логика безспорно установява, че при всяко намиране на размер на определено количество y според уравнение (1) определеността на мерното число x винаги е ограничена. Ограничеността на мерното число x във физиката се изразява с крайно количество m на неговите надеждно определени цифри, които започват с първата му най-надеждно определена различна от нула цифра и завършват с неговата последна достатъчно надеждно определена цифра, наречени значещи цифри на мерното число. Идеализирането на действията с естествени числа като неограничени увеличава количеството на техните определими цифри. Например действието делене (без нула в знаменателя) в едни случаи завършва без остатък след краен брой стъпки, при което полученото число се представя с крайно количество определими цифри. В други случаи обаче това действие не може да бъде завършено поради получаването на остатък, който периодично се повтаря. Затова такова число се представя с продължение от безкрайно количество предвидимо разпределени определими цифри на този остатък. Първият вид рационални числа може да наречем *завършени*, за разлика от втория вид *незавършени* рационални числа. При много други видове действия с естествени числа, като да речем при някои коренувания, се получават така наречените *ирационални* числа с безкрайно количество непредвидимо разпределение на всички определими цифри. Първото голямо сътресение във формалната логика става при откриването на несъделимост, какъвто е случаят с липсата на общ делител на размера на диагонала на идеалния квадрат с размера на неговата страна, което е пример за ирационално число.

В позиционна числена (бройна) система броимото безкрайно множество на рационалните числа **Q** се представя от две качествено различни безкрайни собствени подмножества: а) от собствено подмножество q_c на завършените числа, което е броимо и с крайно количество на предвидимо разпределените цифри на тези числа, поради закономерността на последователно редуване на крайно количество различни един от друг цифрови знаци при добавянето на единица към всяко такова предшестващо число, както е и при броимото безкрайно множество **N**, и б) от собствно подмножество q_u на незавършените числа, което е броимо и с безкрайно количество на предвидимо разпределените цифри на тези числа, образувани от евентуалните непериодично повтарящи се начални цифри, продължени с периодично повтарящите се съответни остатъци. Поради наличието на споменатите две закономерности в разпределението на цифрите на числата на безкрайното множество **Q**, неговата броимост се определя от предвидимостта на това разпределение. Докато неброимостта на безкрайното множество на реалните числа **R** се дължи на наличните в него както на алгебрични ирационални числа, чието безкрайно множество е броимо, така и на трансцендентни ирационални числа, чието безкрайно множество е неброимо, с безкрайно количество непредвидимо разпределени цифри.

В случая е важно, че между безкрайното количество елементи на множеството **N** и безкрайното количество елементи на собственото подмножество q_c на завършените числа на множеството **Q** има определено от еднаква закономерност съобразно взаимно броимо едно към едно (1–1) съответствие, докато елементите на собственото подмножество q_u на незавършените числа на множеството **Q** остават без такова съответствие с елементите на множеството **N**. Затова и безкрайната мощност $\aleph_q$ на множеството **Q**, като сума от безкрайните мощности на двата вида негови броими безкрайни собствени подмножества, е по-голяма от безкрайната мощност $\aleph_0$ на множеството **N**. Самото собствено подмножество q_u на незавършените числа на множеството **Q** е безкрайно множество, съставено от числата на безкрайното множество на неговото собствено подмножество q_c на завършените числа, всяко едно от които е удължено със съответен на непериодичното редуване на неговите цифри периодично повтарящ се остатък. Поради това множеството **Q** представлява броимо безкрайно множество с възможната най-голяма броима безкрайна мощност $\aleph_q = 2\aleph_0$.

Кантор неправилно приема наличието на несъобразна взаимна броимост като критерий за равномощност при броимите безкрайни множества и еднообразно представя двата вида собствени подмножества на рационалните числа посредством съотношението $\frac{a}{b}$, за разлика от явното им представяне като различни видове в позиционна числена система. Чрез доказаната от него несъобразна взаимна броимост на множеството **Q** на рационалните числа с множеството **N** на естествените числа, се прикрива по-голямата броима безкрайна мощност $\aleph_q$ на множеството **Q** от броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ на множеството **N**.

3.2 Парадокс на Кантор

Парадоксът на Кантор за „множеството на всички преброими крайни множества“ се дължи на приемане като еднакви на свойствата на преброимите крайни множества със свойствата на броимото безкрайно множество на естествените числа **N** и на неброимото безкрайно множество на реалните числа **R**. За анализа на тези свойства Кантор извежда една формула, по която се увеличава преброимата крайна мощност *n* на преброимо крайно множество чрез последователно преброяване подмножествата на всяко предшестващо такова множество. Преброяването започва с празното подмножество на преброимо крайно множество, продължава с единичните подмножества на всичките му елементи, минава през последователно образуваните подмножества на всевъзможните им комбинации без повторение по два, по три и т.н. като стига до подмножеството на последната комбинация от всичките негови елементи. По този начин количеството n на елементите на всяко предшестващо преброимо крайно множество се оказва по-малко от количеството 2^n на така преброените негови подмножества. Тук е важно да се отбележи, че тази процедура за увеличаване мощността на всяко преброимо крайно множество неизбежно превръща новото множество в преброимо крайно множество на естествени числа. Валидността на неравенството

(2) $2^n > n$

между преброимите крайни мощности на два последователни члена на така създадената безкрайна редица се доказва с математична индукция, която се състои в тавтологично потвърждаване на установено свойство за членовете на редицата.

От една страна Кантор приема, че установеното неравенство (2) за свойството на всеки член от безкрайната редица на преброими крайни множества е валидно и за „множеството на всички преброими крайни множества“, което представлява определено с други думи множеството **N**. Защото всичките числа на множеството **N** са именно преброими крайни множества на неразличими една от друга единици. Обаче едно нещо са свойствата на членовете на безкрайната редица от преброими крайни множества и съвсем друго нещо са свойствата на броимото безкрайно множество **N**, представено от единството на всички преброими крайни множества. Така както едно нещо са свойствата на отделните зърна, и съвсем друго нещо са свойствата на купчината от такива зърна, забелязано още от древните гърци. Особено в случая, когато такава купчина е безкрайна.

От друга страна, с избирането на един знак за отбелязване на броимата безкрайна мощност на множеството **N**, какъвто е буквата $\aleph_0$, Кантор я фиксира като строго определена броима безкрайна мощност, която обаче е несъизмеримо голяма по отношение на коя да е преброима крайна мощност n. Затова броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ не може да бъде достигана и още по-малко може да бъде надминавана от макар и безкрайно увеличаващата се по този краен начин преброима крайна мощност n. Противоречието $X \wedge \neg X$ в случая се състои в опита на Кантор неоснователно да сравнява две по дефиниция несъизмерими мощности n и $\aleph_0$.

С формулираната по-долу хипотеза за континуума Кантор приема, че с безкрайно последователно увеличаване на преброимата крайна мощност n на преброимо крайно множество чрез преброяване на неговите подмножества, непрекъснато увеличаващата се преброима крайна мощност n на така създаваните преброими крайни множества може не само да достигне, но и да надмине несъизмеримата с нея броима безкрайна мощност $\aleph_0$ на множеството **N**. Той явно не обръща внимание на факта, че при така дефинираната непрекъснато увеличаваща се преброима крайна мощност n не може да се определи кога тя достига броимата безкрайната мощност $\aleph_0$ и кога надминава тази мощност, защото тя винаги остава крайна. Поради това Кантор не спира дотука. Като приема за доказано, че има само една броима безкрайна мощност $\aleph_0$ на броимото безкрайно множество **N** и може да има поне още едно качествено различно от него, вече неброимо безкрайно множество на реалните числа **R** с несъизмеримо по-голяма неброима безкрайна мощност c от броимата безкрайна мощност $\aleph_0$, той предлага за връзка между двата съществено различни вида безкрайни мощности основано на неравенството (2) равенство

(3) $2^{\aleph_0} = c$

– така наречената хипотеза за континуума, при която се предполага, че няма множества с мощност между $\aleph_0$ и c. След това неоснователно се продължава с безкрайна поредица от алефи $\aleph_0 < c = \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$, основана на подобна зависимост между тях.

Така формулираната хипотеза за континуума се основава на вярата, че формулата (2) е валидна за всяко множество, независимо от това дали то е крайно или е безкрайно. Отдавна обаче Болцано показа с примери по друг начин безкрайния път към безкрайността, съставен от последователни несъизмерими един с друг скокове:

Квадратът със страна 2 сантиметра има площ 4 квадратни сантиметра и обща обиколка 8 сантиметра. Общата площ на четирите квадратчета е същата каквато е площта на големия квадрат, обаче общата сума от дължините на техните обиколки е 16 сантиметра. Така при обединяване на тези четири квадратчета техните двумерни неброими безкрайни множества от точки непосредствено се сумират, но половината от точките на тяхното едномерно неброимо безкрайно множество се съединяват във вътрешността на големия квадрат. Това съединяване е доказателство, че при обединяването на квадратчетата половината от тяхната едномерна неброима безкрайна мощност безследно се преобразува в двумерна неброима безкрайна мощност на големия квадрат. Обратното става при неговото разделяне.

Кубът със страна 2 сантиметра има обем 8 кубични сантиметра и обща площ на страните 24 квадратни сантиметра. Общият обем на осемте кубчета е същият какъвто е обемът на големия куб, обаче общата сума от площите на техните страни е 48 квадратни сантиметра. Така при обединяване на тези осем кубчета техните тримерни неброими безкрайни множества от точки непосредствено се сумират, а половината от точките на тяхното сумарно двумерно неброимо безкрайно множество се съединяват във вътрешността на големия куб. Това съединяване е доказателство, че при обединяването на кубчетата половината от тяхната двумерна неброима безкрайна мощност безследно се преобразува в тримерна неброима безкрайна мощност на големия куб. Обратното става при неговото разделяне.

Тези примери са доказателство за несъизмеримостта между неброими безкрайни множества от точки на протяжности с различно целочислено измерение. Заедно с това те са доказателство и за качествената разлика между едномерните точки върху числова линия, двумерните точки по повърхнина и тримерните точки в тримерно пространство.

3.3 Диагоналният метод

$$
\begin{array}{ll}
s_1 & = 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
s_2 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \\
s_3 & = 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots \\
s_4 & = 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_5 & = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_6 & = 0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_7 & = 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
s_8 & = 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\ldots \\
s_9 & = 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_{10} & = 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_{11} & = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
\vdots & \ \vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\ddots
\end{array}
$$

$$
s = 1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\ldots
$$

Фиг. 9. Схемата на диагоналния метод.

В двоичната позиционна числена система може да се представят естествените числа **N**, рационалните числа **Q** и реалните числа **R**. Обаче в рамките на схемата на диагоналния метод на Кантор за доказване съществуването на неброими безкрайни множества, хоризонтално разположените различни последователности от нули и единици може еднозначно да представят само броимото безкрайно количество $\aleph_0$ на елементите на множеството на естествените числа **N**, всяко от тях с крайно количество цифри, щом номерирането на тези последователности е с безкрайната последователност на естествените числа **N** – вж. Фиг. 9. Защото мощността на множеството на рационалните числа $\aleph_q > \aleph_0$, а мощността на множеството на реалните числа **R** е несъизмеримо по-голяма от $\aleph_0$. Затова и числото s_2 = 1 1 1 … с безкрайно много определими цифри неправилно е поставено в схемата на Фиг. 9, при което за такива числа безкритично се приемат и така означените останали числа под него.

Естествените числа на безкрайното множество **N** се съставят чрез последователно редуване на крайно количество различни един от друг цифрови знаци при добавянето на единица към всяко такова предшестващо число. Безкрайното собствено подмножество от незавършени числа q_u на множеството **Q** се образува от числата на неговото безкрайно собствено подмножество на завършените числа q_c, всяко едно от които се удължава със съответен на непериодичното редуване на неговите цифри периодично повтарящ се остатък. За разлика от тези еднообразно дефинирани от своето начало до безкрайност два вида числа, диагоналното число s под схемата е с безкрайно много определими цифри, което обикновено се създава по следния начин: неговата първа цифра е обратна на първата цифра на последователността s_1 в схемата, втората цифра на s е обратна на втората цифра на s_2, третата цифра на s е обратна на третата цифра на s_3 и в повечето случаи по този начин доста по-нататък. Видът и редът на началните цифри на така променящото се диагонално число зависят от начина, по който са наредени естествените числа в схемата на Фиг. 9.

За разлика от тази неиздържана схема, в схемата на Фиг. 10 естествените числа са наредени последователно от своето начало според тяхното увеличаване и означенията им съответно са придвижени до нейния централен диагонал. Образуваното по указания за числото s централно диагонално число с периодично повтарящи се цифри $s_m = 1\ 1\ 1\ \dots$ в нея е възможното най-голямо между незавършените числа на множеството **Q**. Подобни на него с периодично повтарящи се цифри са и числата, образувани според посочения за числото s начин по диагоналите, които последователно минават през наредените означения на естествените числа. Така всички крайни естествени числа се преобразуват като незавършени числа с безкрайно много цифри. Заслужава специално изследване фактът за наличие както на възможно най-малко незавършено число $s_0 = 0\ 0\ 0\ \dots$, така и за възможно най-голямо незавършено число s_m в безкрайното множество на преобразуваните по този начин естествени числа. Обаче множество на преобразувани естествени числа представлява и безкрайното подмножество от незавършените числа q_u на безкрайното множество **Q**. Несъмнена е връзката на тези две преобразувани безкрайни множества с множеството на простите числа.

$$
\begin{array}{ll}
s_0 = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_1 = & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_2 = & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_3 = & 0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_4 = & 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_5 = & 0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_6 = & 0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_7 = & 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_8 = & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_9 = & 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{10} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{11} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{12} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{13} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{14} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{15} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
s_{16} = & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \dots \\
. & .\ . \\
. & .\ . \\
. & .\ . \\
 & \\
s_m = & 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\dots
\end{array}
$$

Фиг. 10. Схема на наредените естествени числа.

Заради безразборната наредба на естествените числа в схемата на Фиг. 9, диагоналното число *s* обикновено има значителна крайна непериодична начална част, чиято дължина се определя от конкретния вид на наредбата. Тази част е крайна, защото числото *s* с всяка следваща стъпка може да се увеличава само с все по-малки относителни промени спрямо неговия непрекъснато увеличаващ се размер. По този начин непериодичното редуване на цифрите на *s* в неговия променящ се край се приближава към редуването на цифрите на заобикалящите го числа на множеството **Q**. Поради това с неговия ход се увеличава вероятността то да се промени така, че да се превърне в число със съответен на непериодичното редуване на неговите цифри периодично повтарящ се остатък. Заради безкрайността на диагонала такава промяна е неизбежна, след което по-нататък неговото неограничено продължение заобикаля останалите естествени числа до тяхната безкрайност. Затова числото *s* се различава от някои от крайните естествени числа както по начина на създаването си, така и заради безкрайността на своите определими цифри, поради което то може да бъде само едно от безкрайно многото числа на множеството **Q**. Обаче то е с предвидимо разпределени цифри като естествените числа, поради което прибавянето му към множеството **N** не променя броимостта на сумарното множество. Така както и съставеното от завършени и от незавършени числа множество на рационалните числа **Q** си остава броимо.

Поради неразкритостта на описаните обстоятелства Кантор прибързано приема несъобразното еднозначно и обратимо съответствие между елементите на две различни броими безкрайни множества като доказателство за тяхна равномощност и така не успява да види по-малките от $\aleph_0$ броими безкрайни мощности на различните безкрайни собствени подмножества на **N**, както и по-голямата от $\aleph_0$ броима безкрайна мощност $\aleph_q$ на броимото безкрайно множество **Q** на рационалните числа. Затова той неоснователно предполага, че броимите безкрайни множества може да бъдат само с една броима безкрайна мощност $\aleph_0$, докато неброимите безкрайни множества може да бъдат поне с неброимата безкрайна мощност *c* на множеството **R**. Тогава, ако **T** е множество съставено от множеството **N** и диагонално създаденото число *s*, с допускане че множеството **T** е броимо необосновано се приема за доказано, че то не може да е броимо поради различността на числото *s* от числата на множеството **N**, когато в същност множеството **T** си остава броимо въпреки неговата различност. По този неоснователен начин сега се счита за доказана неброимостта на множеството на реалните числа **R**. Както вече беше посочено, неброимостта на множеството **R** се дължи на наличните в него алгебрични ирационални и трансцендентни ирационални числа, с безкрайно количество непредвидимо разпределени цифри.

Интересно е да се отбележи, че макар диагоналното число s да е считано за различно от всеки елемент на множеството **N**, досега не е образувано и първото различно от множеството **N** безкрайно множество от диагонални числа $\mathbf{N_1}$. Тогава и сумарното „надмножество“ $\mathbf{T = N + N_1}$ следва да бъде безкрайно, но с по-голяма безкрайна мощност от $\aleph_0$, което противоречи на хипотезата за континуума. С това, както и с парадокса за „множеството на всички преброими крайни множества“, биха могли да се обяснят и съмненията на Канторови съвременници в създаваната от него теория. Съвсем друг е въпросът, че след намирането на броимата безкрайна мощност $\aleph_0$ на множеството на естествените числа **N** като единица мярка за мощността на броимите безкрайни множества, сега остава да разгадаваме прекъснатата непрекъснатост на числовия континуум.

3.4 Поредица на Болцано вместо на Кантор към безкрайността

Подобен на парадокса на Кантор за „множеството на всички преброими крайни бройни множества“ е парадоксът на Бурали-Форти за „множеството на всички преброими крайни редни естествени числа“, защото всяко неначално редно число представлява множеството на предшестващите го редни естествени числа. Подобно на строго определената броима безкрайна бройна мощност $\aleph_0$ на множеството на бройните естествени числа **N** е строго определена и броима безкрайна редна мощност ω на множеството на редните естествени числа $\mathbf{N_\alpha}$. И макар че не беше създадено току що описаното сумарно „надмножество“ $\mathbf{T = N + N_1}$ (навярно поради правдоподобността на хипотеза на Кантор за континуума), самият Кантор е създал безкрайна последователност от броими безкрайни редни множества с все по-голяма броима безкрайна редна мощност от броимата безкрайната редна мощност ω. Въпреки че по дефиниция не може да има безкрайно голямо бройно естествено число, така както по дефиниция не може да има и последно редно естествено число!

Подобно на неоснователно използваната зависимост $2^{\aleph_0} = C$ за връзка между броимата безкрайна бройна мощност $\aleph_0$ на множеството на бройните естествени числа **N** и неброимата безкрайна числена мощност c на бройния числов континуум **R**, за връзка между броимата безкрайна редна мощност ω на множеството на редните естествени числа $\mathbf{N}_\alpha$ и неброимата безкрайна числена мощност ω_1 на редния числов континуум $\mathbf{R}_\omega$, неосновaтелно се приема мощността на безкрайното множество на Канторовите броими безкрайни редни множества на редните естествени числа $\mathbf{N}_\alpha$. И както след неброимата безкрайна числена мощност $c = \aleph_1$ на бройния числов континуум **R** без основание се продължава с безкрайна поредица от алефи с несъизмеримо увеличаваща се неброимост при всеки следващ неин член, така и след неброимата безкрайна числена мощност ω_1 на редния числов континуум $\mathbf{R}_\omega$ без основание се продължава с безкрайна поредица от омеги с несъизмеримо увеличаваща се неброимост при всеки следващ неин член. Просто не се обръща внимание на факта, че критерий за определяне на неброимост несъизмеримо по-голяма от тази на бройния числов континуум и съответно на редния числов континуум, следва да бъде установеното от Болцано увеличаване на неброимостта на мощностите на такива неброими безкрайни числови множества с увеличаването на броя на измеренията на заеманата от тях пространствена протяжност.

4. Заключение

Намирането на $\aleph_0$ като естествена единица мярка за мощността на броимите безкрайни множества открива пътя за еднозначно решаване на хипотезата за континуума, показано в статията „Логическите парадокси“ [3].

Отпратки

[1] B. Bolzano, F. Přihonský, Paradoxien des Unendlichen, C.H. Reclam sen., Leipzig, Germany, 1851.

[2] H. Grant, I. Kleiner, Turning Points in the History of Mathematics, York University, Toronto, Canada, 2016.

[3] H. Manev, The logical paradoxes, International Mathematical Forum – Hikari, Vol. 15, 2020, no. 2, 61 – 92.