

The Role of the Tractatus for the separation of Logic from Mathematics

Evgeny Latinov

Sofia University "St. Kliment Ohridski ", e.latinov@gmail.com

До края на 19 век логиката и математиката са били разглеждани като различни области. Основанието за това винаги е било, че логиката е *формална*, и в този смисъл *безсъдържателна*, за разлика от всички останали теории, включително и математиката. Макар и неемпирична, математиката винаги е била разглеждана като съдържателна теория.

В края на 19 век това разбиране се променя благодарение на *логицизма* - движение във философия на логиката и на математиката, според което математиката се свежда до логиката и в този смисъл е част от логиката. Логицизмът е влиятелен за не малък период от време, като най-важните му поддръжници сред философите са Фреге и Ръсел, а по-късно и логическите позитивисти. След началото на 30-те години на 20-ти век влиянието на логицизма намалява и нещата отново се връщат в нормалното си състояние - логиката и математиката отново започват да се разглеждат като различни неща. Някои от факторите, които способстват за залеза на логицизма, са: утвърждаването на формалния език на предикатната логика от първи ред като стандартен език на логиката; утвърждаването на аксиоматичната система на Цермело-Френкел (а не на теория на типовете) като стандартната система в теория на множествата; възникването на логическата семантика и др. Има и философски фактори, като един от тях е промяната в разбирането за логика, за която важна заслуга има *Логико-философски трактат* на Витгенщайн.

Първо ще разгледам идеите и разбиранията, които според мен водят до възникването на логицизма и чието отричане по-късно води до преодоляването му. След това ще разгледам мястото на *Трактата* в това развитие. По-конкретно тезата ми ще е, че макар да не може да бъде причислен към логицизма, Витгенщайн е повлиян от негови ключови идеи, като в същото време разбирането му за логиката изиграва важна философска роля за преодоляването му и повторното разделяне на логика и математика.

Ще изхождам от разбирането, че съществена характеристика на логиката е и винаги е било това, че е *неутрална* по отношение на *всяка възможна съдържателна теория*. Т.е., ако една теория е непротиворечива, колкото и да е странна, логиката не трябва да е в противоречие с нея. Това означава, че част от логиката не трябва да бъдат никакви съдържателни тези относно положението на нещата в света - тя не трябва да се ангажира с това, какво съществува, и с това, как стоят нещата по отношение на това, което съществува. Ако такова ангажиране е налице, логиката бисе намирала в противоречие с някаква *възможна* теория, която се ангажира с обратното, и това би я превърнало в една от многото съдържателни теории. (Неутралността на

логиката е тясно свързана с една друга нейна определяща характеристика - това, че е формална.)

Математиката, поне на пръв поглед, не притежава неутралността на логиката. Тя се ангажира със съществуването на определени неща (числа, геометрични фигури и т.н.), както и с това, че те имат определени характеристики и се намират в определени отношения помежду си. За всяка математическа теория би могло да се формулира друга теория (не непременно математическа), която е непротиворечива и ѝ противоречи. Например, без да изпаднем в противоречие, можем да твърдим (заедно с Аристотел), че не съществуват точки и прави. Как тогава се е стигнало до възгледа, че математиката е логика? За това, както изглежда, има две причини. От една страна в края на 19 век възниква теория на множествата и благодарение на Дедекин и други става ясно, че обектите на аритметиката и на математическия анализ - естествените и реалните числа - са сводими до множествата. От друга страна представителите на логицизма в лицето на Фреге и Ръсел разглеждат множествата, както и абстрактните обекти, от които множествата са изводими, като предмети на логиката. Като резултат, за логицистите математическите предмети стават предмет на логиката.

Причината, Фреге и Ръсел да третират множествата, както и абстрактните предмети, от които множествата могат да бъдат изведени, като логически предмети, е общото разбиране, че *на всеки предикат в езика отговаря определен абстрактен предмет в действителността*. При Фреге тези абстрактни предмети са така наречените от него *понятия* (в които няма нищо субективно) - функции, които приемат като аргументи индивидии дават като стойности *истината* или *неистината* (отново абстрактни предмети). При Ръсел са *пропозиционалните функции* - функции, които приемат като аргументи индивидии или други пропозиционални функции и дават като стойности *пропозиции* - абстрактни предмети, отговарящи на изреченията. Именно тези обозначавани от предикатите абстрактни предмети са въпросните логически предмети, до които обектите на математиката се свеждат.

Понятията на Фреге и пропозиционалните функции на Ръсел отговарят на всекидневните понятия за *свои свойства отношение*, а разбирането, че на всеки предикат от езика съответства абстрактен предмет от действителността, отговаря на дълбоко вкоренения във всички нас предразсъдък, че на думи като „човек“ или „синьо“ съответстват определени свойства, а на думи като „обича“ или „сестра“ - определени отношения. Тъй като Фрегевите понятия и Ръселовите пропозиционални функции са еквивалентът на свойствата и отношенията, ще ги наричам по този начин, вместо с техническите им наименования. При Фреге всяко свойство и отношение се схваща като интензионален обект, който е неделимо свързан с определен (също абстрактен) екстензионален обект - множеството от нещата, които попадат под свойството или отношението. (1) При Ръсел свойствата и отношенията се разбират по подобен начин, с тази разлика, че множествата се дефинират контекстуално в термините на свойствата и отношенията. Казано с едно изречение: отговарящите на предикатите свойства

иотношения и свързаните с тях множества са логическите предмети, до които логицистите свеждат математическите предмети, като по този начин става възможно математиката да се разглежда като част от логиката.

Изхождайки от разбирането, че всички предикатив във всички теории във всички езици обозначават някакви свойства или отношения, Фреге и Ръсел имат на разположение онтологията на свойствата и отношенията, а от там и онтологията на множествата. От последните, посредством дълга поредица от дефиниции и доказателства, те успяват да конструират математическите обекти и да изведат базовите истини за тях (едно само по себе си голямо постижение). Основанието всичко това да попада под рубриката „логика“ е, че *всяка възможна* теория използва предикати и следователно (според разбирането им) *всяка възможна теория* предполага съществуването на някакви свойства или отношения - това предполага *ня* свойства или отношения става със самия факт на употреба на езика. Според това разбиране, когато казвам „Някои котки са черни“, аз автоматично се ангажирам, както със съществуването на черни котки, така и със съществуването на *сво*йствата *чернота* и *да бъдеш котка*, които са неразривно свързани множества на черните неща и на котките. Съществената характеристика на логиката - нейната неутралност по отношение на всяка теория и онтология - при логицизма се осигурява от това, че всяка възможна теория използва предикати, което (според логицизма) я ангажира със съществуването на определени свойства и отношения. Логичизмът е възглед, който принуждава логиката да предпостави онтологията на свойствата и отношенията, както и свързаната с нея онтология на техните екстензии - множествата. Така логиката се превръща в съдържателна теория - в пределно общата и абстрактна *теория за свойствата и отношенията изобщо*. Макар и пределно обща, такава теория е съдържателна.

По-късно логиката бива освободена от тази натрапена ѝ онтология. Това става, когато като неин стандартен език се налага символният език на предикатната логика от първи ред. Характерно за негоя, че символите му за предикати не се отнасят до нищо в действителността. По този начин логиката вече не се ангажира с онтологията на свойствата и отношенията. Единствените символи в езика на предикатната логика от първи ред, които трябва да се отнасят до нещо в действителността, са единичните термини. Те задължително реферират към нещо, но какво е то зависи от конкретната съдържателна теория и имплициранията от нея онтология. Тази теория може да е такава, че да постулира или имплицира съществуването на свойствата, отношенията или множествата, но може и да е такава, че да отрича тяхното съществуване. Логиката е неутрална по този въпрос. Когато изказвам твърдението „Някои котки са черни“, използвайки формализирания език на предикатната логика от първи ред, аз се ангажирам единствено със съществуването на черни котки; не се ангажирам нито със съществуването на свойствата *черно* или *да бъдеш котка*, нито със съществуването на множествата на черните неща или на котките. За да го направя, трябва да направя ново твърдение, в което *експлицитно* да твърдя, че такива неща съществуват. В това ново твърдение въпросните свойства или множества ще бъдат реферирани не чрез предикатни символи, а чрез единични

термини, т.е. чрезсъщия тип символи, чрез които се реферира към черните котки. Тъй като стандартната аксиоматична система на теория на множествата (тази на Цермело-Френкел) се формулира със същия формализиран символен език, в нея трябва да има съдържателни аксиоми, които да гарантират съществуването на множествата и на всички останали математически обекти, както и техните характеристики. Тези аксиоми *не са логически валидни* изречения (не са тавтологии в термините на Витгенщайн), поради което и не са част от логиката. Логика и математика отново се оказват разделени.

Философията на логиката в *Трактата* има важна заслуга за повторното разделяне на логика и математика. Заслугата, разбира се, не е само на Витгенщайн. От значение е например формулирането на предикатната логика от първи ред като *самостоятелна* система от Хилберт и неговите ученици; или формулирането от Тарски на семантиката на предикатната логика от първи ред по такъв начин, че само единичните термини, а не предикатите, реферират към неща. Ролята на Витгенщайн е философска. Тя се състои в разбирането, че изреченията на логиката са тавтологии - т.е. лишени от съдържание изречения, които не казват нищо за действителността. Този възглед се налага и е преобладаващото съвременноразбиране за логиката. (Съвременният термин не е „тавтология“, а „логически валидно изречение“). И тъй като преобладаващото разбиране за математиката е, че нейните изречения *не са* логически валидни (т.е. *не са* тавтологии в термините на Витгенщайн), философската значимост на *Трактата* за разделянето на логика и математиката става очевидна.

По-конкретно, една от главните тези на философията на езика в *Трактата* е, че истинностната стойност на всяко не-елементарно (т.е. съставно) изречение е функция от истинностните стойности на определено множество от елементарни изречения, а изреченията на логиката са тези съставни изречения, които са тавтологии, т.е. които са истинни независимо от истинностните стойности на елементарните изречения. По този начин логиката бива отнесена изключително към езика, а не към действителността. (Изключение прави говоренето за *логическо пространство*, което предметите в действителността определят, но то е свързано с функционирането на елементарните изречения - тавтологиите не са елементарни изречения.)

Разбирането, че логиката има отношение единствено към езика, а не към действителността, е ново и е съществено различно от разбирането за логика на Фреге и на Ръсел. Това ново разбиране за логиката е от значение за разделянето ѝ от математиката, защото преобладаващото разбиране за математиката е, че тя се занимава с извън-езикови неща - числа, функции, геометрични фигури и т.н. Спорейки с Фреге и Ръсел, Витгенщайн казва (4.441, 5.4), че не съществуват логически предмети, имайки предвид, че на логическите конектори (например отрицанието) не отговаря нищо в действителността, т.е. че те са част единствено от езика. Във логико-математическите системи на Фреге и Ръсел конекторите би трябвало да се разглеждат като нещо извън-езиково - пропозиционални функции, които приемат като аргументи пропозиции и дават като стойности отново пропозиции. Пропозиционалните функции при Ръсели

техните екстензии при Фреге са абстрактните обекти, които във философията на логицизма се оказват общите предмети на логиката и на математиката, обуславяйки възгледа, че математиката е част от логиката. Когато тези абстрактни обекти престанат да бъдат предмет на логиката, но продължат да бъдат предмет на математиката, тя вече не може да бъде разглеждана като част от логиката.

Въпреки че разбирането му за логика е важно за преодоляването на възгледа на логицизма, Витгенщайн е повлиян от идеите на логицизма. Нещо повече, възгледите му за начина, по който функционира езикът, и за отношението между логика и математика изглеждат по-близки до логицизма отколкото до преобладаващото съвременно разбиране. Макар и не идентични, в *Трактата* логиката и математиката се оказват много близки. Относно влиянието на логицизма върху възгледите на Витгенщайн в *Трактата* ще се спра на двенеца. Едното е начинът, по който функционират елементарните изречения; другото е разбирането на Витгенщайн за математика, а от там и отношението между математика и логика.

По-рано изтъкнах като важен фактор за това, да се стигне до разбирането, че математиката е част от логиката, схващането, че предикатите обозначават неща-свойства или отношения. Това схващане ангажира логиката с определена онтология от абстрактни същности, от която могат да се изведат множествата, а от там и останалите математически обекти. Така че идеята, че на всеки предикат отговаря определено нещо в действителността, е ключова за логицизма. Тази идея е налице в образната теория за значението на *Трактата*, т.е. в теорията за начина, по който функционират елементарните изречения в езика. Според Витгенщайн езикът може да изобразява действителността благодарение на това, че на всяка част на едно елементарно изречение отговаря прост предмет в действителността. Макар че не е ясно коиточно са изреченията, които Витгенщайн разглежда като елементарни, почти сигурно е, че това не са граматически простите изречения на съществуващите езици. Едва ли обаче имаме друг избор освен да мислим за тях *понеформално* по този начин, т.е. да мислим за логическата им структура като тази на атомарните изречения в предикатната логика, а именно като свързвания на предикати с единични термини. Тогава, ако вземем като хипотетичен пример за едно елементарно изречение „Това е черно“, според образната теория за значението както единичният термин „това“, така и предикатът „е черно“ трябва да обозначават нещо от действителността - а именно *предмет* от онтологията на *Трактата*. По този начин тази ключова за логицизма идея, че на предикатите отговарят съществуващи неща, е запазена. Нещо повече, тази идея е основанието за онтологията на *Трактата*. Според Витгенщайн значението на всяко изречение в езика се свежда до значенията на елементарните изречения, а за да има едно елементарно изречение значение е необходимо всяка негова част да реферира предмет. По този начин това, на всеки *прост* предикат да отговаря предмет от действителността, се оказва необходимо условие за съществуването на каквото и да е значение в езика. И тъй като логиката предполага наличието на език, излиза, че онтологията на свойствата и отношенията е нещо, което логиката

трябва да предпостави. Т.е. при Витгенщайн имаме същата позиция като при Фреге и Ръсел, но развита като онтология, която (поне външно) е отделена от логиката - онтологията на логическото пространство, което предметите определят. Разликата с Фреге и Ръсел е, че при тях онтологията на свойствата и отношенията е част от логиката, докато при Витгенщайн онтологията е нещо различно от логиката, защото логиката според него се отнася само до езика (тя е логика на езика, а не логика на езика *и* действителността). Въпреки това онтологията на логическото пространство на *Трактата* е необходимо условие за съществуването на език, а от там индиректно и за съществуването на логика.

Съществена разлика между Витгенщайн, от една страна, и Фреге и Ръсел, от друга, е, че според Витгенщайн само *елементарните* предикати реферират неща. Логико-математическите системи на Фреге и Ръсел предпоставят, че *навсеки смислен* предикат отговаря на определено свойство или отношение. По-конкретно символиката на Фреге отговаря на езика на предикатна логика от втори ред, в която важи принципът, че по отношение на всяко формулируемо условие в този език (т.е. по отношение на всеки възможен *съставен* предикат) съществува свойство или отношение, което му отговаря. По подобен начин системата на *Principia mathematica* гарантира, че за всеки възможен съставен предикат, който е в съгласие с Ръселовата теория на типовете, съществува пропозиционална функция (т.е. свойство или отношение), което му отговаря. Така че този ключов за логицизма принцип е налице и при Витгенщайн, но е чувствително отслабен, доколкото важи само за елементарни предикати.

Също и философията на математиката в *Трактата* в някакъв смисъл е в съгласие с духа на логицизма, защото, макар и не идентични, математика и логика се оказват много близки помежду си. Причината за близостта им е точно обратната на тази, поради която ги уеднаквяват Фреге и Ръсел. За последните абстрактните предмети на свойствата и отношенията и свързаните с тях множества са нещо, с което се занимават както логиката, така и математиката. За Витгенщайн, напротив, както не съществуват логически предмети, така не съществуват и математически предмети. Изреченията на математиката, също както изреченията на логиката, са псевдо изречения, които не изразяват положения на нещата, поради което са лишени от смисъл.

Според Витгенщайн математическите изречения са *равенства между естествени числа*. (Философията на математиката в *Трактата* е доста фрагментарна. Тя се занимава само с аритметичните операции на събирането и умножението между естествени числа, като по някаква причина игнорира неравенствата-твърденията, че нещо е по-малко от друго нещо, които също са част от езика на аритметиката.) Това, че равенствата се оказват псевдо-изречения, изглежда отново свързано с принципа, че елементарните изречения получават значение чрез това, че всяка тяхна част реферира предмет от действителността, защото тогава при крайния логически анализ на различни предмети биха отговаряли различни прости символи, а на един и същ предмет - един и същ прост символ. Като резултат при крайния логически анализ това, че нещо е идентично с нещо, или че е различно от нещо, може само *да се покаже* чрез това, че обозначаващите

символи са един и същ символ или различни символи - то не може *да се изрази* с изречение, а равенствата са изречения. В съответствие с това равенствата са обявени за безсмислени.

Философията на математиката в *Трактата* може да се характеризира като *формализъм*, за разлика от *реализма* (или *платонизма*) на Фреге и Ръсел. Математиката според Витгенщайн не е теория, която се занимава с предмети от действителността (било то абстрактни, или не), а има отношение единствено към операции с изразиот езика. Математиката и логиката се оказват нещо много близко, първо, защото техните изречения са псевдо изречения,и, второ, защото ги свързва понятието за *изчисление*, в основата на което стои понятието за *операция*. Витгенщайн схваща операциите като приложими единствено към изрази от езика, като чрезприлагането им се получат нови изрази от езика. В логиката има само една операция - тази на едновременно отричане на множество от изречения. Т.е.,това е операция, която се прилага към произволно множество от изречения,в резултат на което се получава ново изречение, което е истинно, ако и само ако всички изречения от множеството са неистинни.Тази операция се прилага отначалокъм елементарни изречения, а след това и къмрезултатите от предишни прилагания. Така, чрез прилагане на операцията отново и отново,възникват всички съставни изречения, които по този начин се оказват истинностни функции от елементарни изречения. (Съществена разлика на логиката на Витгенщайн от стандартната пропозиционална логика е, че съставните изреченията не са непременно истинностни функции от *краен* брой изречения. Причината е, че операцията може да се прилага и към безкрайни множества от изречения. По този начин стават възможни *безкрайни* конюнкции, *безкрайни* дизюнкции и т.н.)

В някакъв смисъл математиката в *Трактата* се оказва нещо по-общо от логиката, защото числата са *генерализация на понятието за итерации на една операция*. Числата се отнасят до прилагането - отново и отново - на *която и да е* операция, докатоизреченията на логиката (тавтологиите) са резултат от всички възможни итерации на една-единствена *конкретна* операция.

По принцип естествените числа се получават чрез последователно добавяне на единица към едно начално число (нулата). На добавянето на единица в *Трактата* отговаря прилагането на *каквато и да е* операция към резултата от предишното ѝ прилагане. Например, ако тръгнем от едно елементарно изречение(на което можем да си представим, че отговаря числото 0) и го отречем, на отрицанието му би отговаряло числото 1; ако отречем отреченото, на това би отговаряло числото 2 и т.н.Идеята при числата обаче е, че не става въпрос за определена операция (каквато е отрицанието или добавянето на единица), а за всяка възможна операция. Например, ако гледаме само операцията на отрицанието,би се оказало, че 2 е равно на 0, защото всяко изречение е логически еквивалентно на отрицанието на отрицанието му. 2 обаче не е равно на 0, защото при числата става въпрос за *която и да е* операция - не при всяка операция прилагането на прилагането ѝ дава същото нещо, от което сме тръгнали.

За Витгенщайн математиката не е самостоятелна теория - тя изобщо не е теория, защото според него започва и свършва с употребата на не-математическите изречения. Единствената функция на математиката е възможността да се заключава от определени не-математически изречения към други не-математически изречения. Например, от истинността на изречението „Във всеки от джобовете ми има по 2 евро“ бих могъл да заключа за истинността на изречението „Двата ми джоба има общо 4 евро“. Интуитивно основанието за това заключение е равенството „ $2+2=4$ “, но според Витгенщайн то е псевдо изречение и не е нужно (в качеството му на изречение) за заключението. Това което е нужно са имплицитно съдържащите се в това равенство закономерности на последователното прилагане, отново и отново, на която и да е операция.

Несъмнено има аналогия между изреченията на логиката и тези на математиката. Също като тавтологиите равенствата са лишени от смисъл псевдо изречения. Също както при тавтологиите при равенствата има нещо, което стои зад тях, и прави възможно заключаването от истинността на определени не-математически (и поради това смислени) изречения за истинността на други такива изречения. Това което обединява логиката и математиката в *Трактата* е идеята за едно изчисление, насочено към практическото използване на езика.

Философията на математиката в *Трактата* изобщо няма успеха на философията на логиката в *Трактата*. Поради неговата странност и крайност разбирането на Витгенщайн за математика няма почти никакво влияние. Като резултат от това философията на математиката в *Трактата* понякога неправилно се отъждествява с философията на логиката в *Трактата*. Така например Рамзи, който е вдъхновен последовател на философията на Витгенщайн, смята (Ramsey 1931) за негов голям принос теорията, че изреченията на математиката са тавтологии. Витгенщайн обаче не ги разглежда като тавтологии, а като равенства, и макар по някои формални характеристики равенствата и тавтологиите в *Трактата* да се оказват много близки, те определено са различни неща.

Разбирането на Витгенщайн за логика, за разлика от разбирането му за математика, става преобладаващо разбиране във философия на логиката. Паралелно с това разбирането на Фреге и Ръсел за математика, за разлика от разбирането им за логика, става преобладаващото разбиране във философия на математиката. (Под „разбирането на Фреге и Ръсел за математика“ разбирам това, че математиката се състои от *теории* за абстрактни обекти - множества, функции, числа и т.н.) Така че в крайна сметка побеждава възгледът на Фреге и Ръсел за математиката, а не за логиката, и възгледът на Витгенщайн за логиката, а не за математика. Логиката и математиката се оказват отново разделени, както винаги са били.

Бележки:

(1) В случая разликата между интензионални екстензионални се състои само в това, че ако под дадени свойства (отношения) попадат едни и същи неща, те

може и да не са едно и също свойство (отношение), докато ако дадени множества имат едни и същи елементи, те задължително са едно и също множество.

Литература:

Ramsey, F., „The Foundations of mathematics“, in *The Foundations of Mathematics and other essays*, Routledge & Kegan Paul LTD, 1931